ΠΡΑΚΤΙΚΑ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

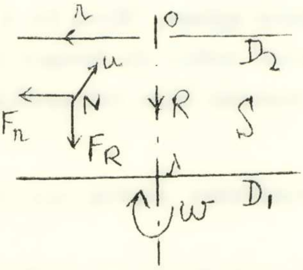
## ΣΥΝΕΔΡΙΑ ΤΗΣ 6ΗΣ ΜΑΪΟΥ 1982

ΠΡΟΕΔΡΙΑ ΠΕΡΙΚΛΗ ΘΕΟΧΑΡΗ

ΦΥΣΙΚΗ.— **Ὀρθοφυγόκεντρος δύναμις**, *ὑπὸ Δανιὴλ Μ. Λέκκα**. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ Ἀκαδημαϊκοῦ κ. Καίσαρος Ἀλεξοπούλου.

### 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. 1. Ἔστω χῶρος S μεταξὺ ἑνὸς κινητοῦ δίσκου $D_1$ καὶ ἑνὸς σταθεροῦ $D_2$ εἰς ἀπόστασιν λ μεταξύ των (Σχ. 1). Μία μικρὰ σφαῖρα εὑρισκομένη, ὡρισμένην




Σχ. 1.

στιγμήν, εἰς τὸ σημεῖον N (r, R) θὰ κινηθῇ μὲ μίαν ταχύτητα συνάρτησιν τῶν r καὶ R, καὶ τοῦτο διότι λόγω τῆς τριβῆς (Viscosity) ἡ ταχύτης τοῦ ἀέρος μεταβάλλεται μὲ τὸ R. Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τὴν ὁποίαν θὰ λάβῃ ἡ σφαῖρα θὰ εἶναι καὶ αὐτὴ συνάρτησις τῶν r καὶ R. Ὅταν φθάσῃ εἰς τὸ γειτονικὸν σημεῖον N′(r + dr, R + dR) ἡ ἐνέργειά της θὰ αὐξηθῇ κατά:

$$dW = \frac{\partial W}{\partial r} \cdot dr + \frac{\partial W}{\partial R} \cdot dR$$

* DANIEL M. LECAS, **Force orthocentrifuge**.

ὅπου $\frac{\partial W}{\partial r}$ ἡ φυγόκεντρος δύναμις καὶ $\frac{\partial W}{\partial R}$ ἡ ὀρθοφυγόκεντρος, ὅπως τὴν ὠνομάσαμεν.

1. 2. Σκοπὸς τῆς παρούσης ἐργασίας εἶναι ὁ ἀκριβὴς προσδιορισμὸς τῆς ὀρθοφυγοκέντρου δυνάμεως μίας σφαίρας, ἐὰν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ μεταβολὴ τῆς ταχύτητος δημιουργεῖ καὶ δευτερευούσας περιστροφικὰς κινήσεις ἀπὸ τὰς τριβὰς τοῦ ἀέρος, αἱ ὁποῖαι δὲν εἶναι ἴσαι καθ' ὅλην τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας. Ἐνῶ ἀντιθέτως αἱ δυνάμεις πιέσεως δὲν δημιουργοῦν ζεῦγος, ὡς διερχόμεναι διὰ τοῦ κέντρου.

1. 3. Θεωροῦμεν ὡς βασικὴν προϋπόθεσιν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τοῦ Reynold εἶναι μικρότερος τοῦ 0,2 καὶ ἑπομένως δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸν νόμον τοῦ Stokes.

1. 4. Ὡς νόμον τοῦ Stokes χρησιμοποιῶ τὸν γενικευμένον τοιοῦτον, ὅστις ἰσχύει διὰ ρευστὸν ἀσυνεχοῦς δομῆς, ὡς συνημμένη ἀνακοίνωσις τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν 1981. Χρησιμοποιῶ δὲ ἕνα ἀστερίσκον ὅταν ἀναφέρωμαι εἰς παράγραφον τῆς ἀνακοινώσεως ταύτης.

1. 5. Διὰ πολὺ μικρὰς σφαίρας, μεγέθους τῆς τάξεως τῶν ἀτομικῶν διαστάσεων, προσδιορίζω τὴν ὀρθοφυγόκεντρον δύναμιν εἰς ἰδιαίτερον κεφάλαιον.

1. 6. Πρὸς ἀποφυγὴν πολυπλόκων πράξεων, θεωρῶ ὅτι τὰ r καὶ R τηροῦνται σταθερὰ δι' ἑνὸς οἱουδήποτε τρόπου. Ἔστω ὅτι ἡ βαρύτης ἀντισταθμίζει τὴν δύναμιν $F_R$ καὶ ἕνα ἠλεκτρικὸν πεδίον τὴν δύναμιν $F_r$ μίας ἰονισμένης σφαίρας. Οὕτω περιορίζομαι εἰς τὴν στατικὴν λύσιν τοῦ προβλήματος.

## 2. ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ ΑΕΡΟΣ ΔΙΑ ΤΡΙΒΗΣ

2. 1. Ἔστω δίσκος $D_1$ στρεφόμενος μὲ ταχύτητα ω περὶ τὸν ἄξονα OR, καὶ εἰς ἀπόστασιν λ ἕτερος δίσκος $D_2$ σταθερὸς (Σχ. 2).

Θεωροῦμεν ἐντὸς τοῦ, μεταξὺ τῶν δύο δίσκων, χώρου ἓν σύστημα ὀρθογωνίων συντεταγμένων Nxyz, τὸ ὁποῖον κινεῖται μαζὶ μὲ τὸ σημεῖον N, τὸ τὸ ὁποῖον περιγράφει τὴν περιφέρειαν C, ἀκτῖνος r καὶ κειμένην ἐπὶ ἐπιπέδου παραλλήλου τῶν δίσκων εἰς ἀπόστασιν R ἀπὸ τὸν $D_2$.

Ἐπιλέγομεν τὸ σύστημα Nxyz τοιοῦτον ὥστε:

— Ὁ ἄξων Nx παράλληλος πρὸς τὴν ταχύτητα u ἢ ἐφαπτόμενος τοῦ κύκλου C.

— Ὁ ἄξων Ny παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα περιστροφῆς OR.

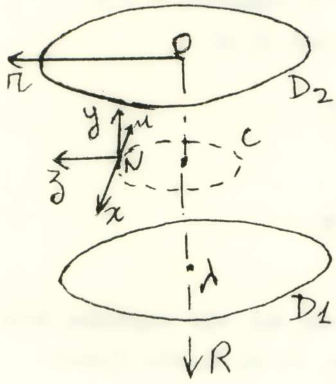
— Ὁ ἄξων Nz ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος Or τοῦ κύκλου O, C.

Ἐὰν θεωρήσωμεν ἀμελητέας τὰς δυνάμεις ἀδρανείας καὶ βαρύτητος τοῦ ἀέρος, τότε ἡ ἐξίσωσις τοῦ Navier, ἡ ὁποία ὁρίζει τὴν μετάδοσιν τῆς ταχύτητος ἀπὸ στρῶμα σὲ στρῶμα τοῦ ἀέρος, γράφεται :

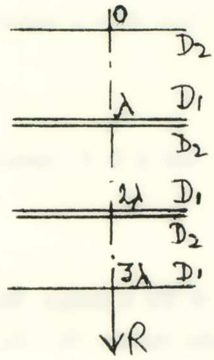
$$\frac{\partial p}{\partial x} = \eta \, \Delta u \qquad (2.\ 1)$$

ὅπου η : συντελεστὴς τριβῆς τοῦ ἀέρος, p : πίεσις τοῦ ἀέρος καὶ

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad (2.\ 2)$$




Σχ. 2.




Σχ. 3.

2. 2 Δεχόμεθα διὰ τὴν 2. 1 τὰς κάτωθι παραδοχάς :

— Τὸ u εἶναι ἀνάλογον τοῦ

$$r + z \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial z} = C^{te} = \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad (2.\ 3)$$

— Διὰ λόγους συμμετρίας ἡ ταχύτης u καὶ ἡ πίεσις p εἶναι σταθεραὶ κατὰ μῆκος τῆς περιφερείας C, ὁπότε ἔχομεν :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \ , \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad (2.\ 4)$$

Ἐκ τῶν 2. 2, 2. 3 καὶ 2. 4 ἡ 2. 1 γράφεται :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (2.\,5)$$

Ἀλλὰ Ny παράλληλος τῆς OR, μὲ διαφορετικὴν ἀρχήν, ἄρα ἔχομεν :

$$dy = -dR \Longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial R^2}$$

καὶ κατὰ συνέπειαν ἡ 2. 5 γράφεται καὶ ἐπιλύεται ὡς κατωτέρω :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial R^2} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial R} = A \Longrightarrow u = AR + B \qquad (2.\,6)$$

A καὶ B σταθεραί, προσδιοριζόμεναι ὡς ἀκολούθως :

— Διὰ $R = 0$ πρέπει νὰ ἔχωμεν $u = 0$, ἑπομένως $B = 0$.

— Διὰ $R = \lambda$ πρέπει νὰ ἔχωμεν $u = \omega r$, ἐξ οὗ :

$$A = \frac{\omega r}{\lambda}$$

καὶ ἡ 2. 6 γράφεται :

$$u = \frac{\omega r R}{\lambda}$$

2. 3 Τὸ λ ἐπέχει θέσιν μήκους κύματος διὰ τὴν ταχύτητα, διότι ἐὰν τὸ ζεῦγος τῶν δίσκων $D_1$, $D_2$ ἐπαναλαμβάνεται, ὡς σχ. 3, τότε ἔχομεν :

$$u(r, R) = u(r, R + \lambda) = u(r, R + 2\lambda) = \dots$$

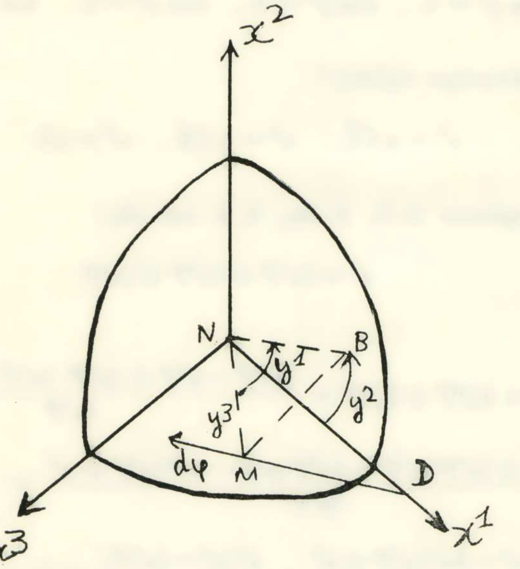
### 3. ΔΕΥΤΕΡΕΥΟΥΣΑΙ ΤΑΧΥΤΗΤΕΣ

3. 1. Ἔστω σφαῖρα κέντρου N καὶ ἀκτῖνος α ἐντὸς τοῦ χώρου τοῦ σχήματος 4. Θεωροῦμεν δύο συστήματα συντεταγμένων (Σχ. 4), τὸ ὀρθογώνιον $Nx^1x^2x^3$ καὶ τὸ πολικὸν $Ny^1y^2y^3$, τοιαῦτα ὥστε :

$$\left.\begin{array}{l} -Nx^1 \text{ παράλληλος τῆς ταχύτητος } u \\ -Nx^2 \quad \text{»} \quad \text{τοῦ ἄξονος } OR. \\ -Nx^3 \text{ ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος } Or. \\ y^1 = \widehat{MNB}\,,\ y^2 = \widehat{DNB}\,,\ y^3 = NM \end{array}\right\} \qquad (3.\,1)$$

Ἤτοι καὶ τὰ δύο συστήματα κινητὰ μὲ τὴν σφαῖραν.

Ἡ στοιχειώδης δύναμις τριβῆς τοῦ ἀέρος dφ, ἐπὶ τῆς σφαίρας, εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης DM, ἄρα dφ καὶ DM σχηματίζουν τὰς αὐτὰς γωνίας μὲ τοὺς ἄξονας. Ἐὰν θέσωμεν $Q = DM$ καὶ λάβωμεν τὰ $Q^1$, $Q^2$, $Q^3$ ἴσα μὲ τὰς




Σχ. 4.

προβολὰς τοῦ Q ἐπὶ τῶν ἀξόνων x τοῦ αὐτοῦ δείκτου, αἱ ἐν λόγῳ γωνίαι δίδονται ἀπὸ τὰς σχέσεις :

$$\cos a_1 = \frac{Q^1}{Q}, \quad \cos a_2 = \frac{Q^2}{Q}, \quad \cos a_3 = \frac{Q^3}{Q} \tag{3. 2}$$

Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον MND ἔχομεν :

$$MN = a, \quad DN = \frac{a^2}{x^1}, \quad Q^1 = x^1 - DN = \frac{(x^1)^2 - a^2}{x^1} \tag{3. 3}$$

(Ἡ παρένθεσις εἰς τὸ $x^1$ σκοπὸν ἔχει νὰ ἀποφευχθῇ σύγχυσις μεταξὺ ἐκθετῶν καὶ δεικτῶν).

Ἐξ ἄλλου :

$$Q^2 = x^2, \quad Q^3 = x^3 \tag{3. 3α}$$

Αἱ σχέσεις αἱ συνδέουσαι τὰ δύο συστήματα συντεταγμένων εἶναι (Σχ. 4):

$$x^1 = a\cos y^1 \cos y^2\,, \quad x^2 = a\cos y^1 \cdot \sin y^2\,, \quad x^3 = a\sin y^1$$

Θέτομεν χάριν συντομογραφίας:

$$\cos y^1 = C\,, \quad \sin y^1 = S\,, \quad \cos y^2 = \bar{C}\,, \quad \sin y^2 = \bar{S}$$

καὶ ἔχομεν τὰς ἀνωτέρω σχέσεις:

$$x^1 = aC\bar{C}\,, \quad x^2 = aC\bar{S}\,, \quad x^3 = aS \qquad (3.\ 4)$$

Ἐκ τῶν σχέσεων 3. 3, 3. 3α, 3. 4 καὶ τῆς:

$$a^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$$

λαμβάνομεν:

$$(Q)^2 = (Q^1)^2 + (Q^2)^2 + (Q^3)^2 = \frac{[(x^1)^2 - a^2]^2 + (x^2)^2 \cdot (x^1)^2 + (x^3)^2 \cdot (x^1)^2}{(x^1)^2} =$$

$$= \frac{(x^1)^4 + (x^2)^2 (x^1)^2 + (x^3)^2 (x^1)^2 - 2a^2 (x^1)^2 + a^4}{(x^1)^2} =$$

$$= \frac{(x^1)^2 a^2 - 2a^2 (x^1)^2 + a^4}{(x^1)^2} = \frac{a^2 [a^2 - (x^1)^2]}{(x^1)^2} \Rightarrow Q = \frac{a\sqrt{a^2 - (x^1)^2}}{x^1} \qquad (3.\ 5)$$

Ἐκ τῶν σχέσεων 3. 3, 3. 3α, καὶ 3. 5, αἱ 3. 2 γράφονται:

$$\cos\alpha_1 = -\sqrt{1 - c^2\bar{c}^2}\,, \quad \cos\alpha_2 = \frac{C^2\bar{S}\bar{C}}{\sqrt{1 - c^2\bar{c}^2}}\,, \quad \cos\alpha_3 = \frac{CS\bar{C}}{\sqrt{1 - c^2\bar{c}^2}} \qquad (3.\ 6)$$

3. 2. Αἱ συνιστῶσαι τῆς $d\varphi$ ὡς πρὸς τοὺς ἄξονες $Nx^1$, $Nx^2$, καὶ $Nx^3$, εἶναι:

$$d\varphi_1 = d\varphi \cdot \cos\alpha_1\,, \quad d\varphi_2 = d\varphi \cdot \cos\alpha_2\,, \quad d\varphi_3 = d\varphi \cdot \cos\alpha_3 \qquad (3.\ 7)$$

καὶ αἱ στοιχειώδεις ῥοπαὶ εἶναι:

$$\left.\begin{array}{l} dm_1^2 = d\varphi_1 \cdot x^2 \ \text{καὶ}\ dm_2^1 = -d\varphi_2 \cdot x^1\,, \ \text{ὡς πρὸς τὸν ἄξονα}\ Nx^3 \\ dm_3^1 = d\varphi_3 \cdot x^1 \ \text{καὶ}\ dm_1^3 = -d\varphi_1 \cdot x^3\,, \ \text{ὡς πρὸς τὸν ἄξονα}\ Nx^2 \\ dm_2^3 = d\varphi_2 \cdot x^3 \ \text{καὶ}\ dm_3^2 = -d\varphi_3 \cdot x^2\,, \ \text{ὡς πρὸς τὸν ἄξονα}\ Nx^1 \end{array}\right\} \qquad (3.\ 8)$$

Ἐκ τῶν σχέσεων 2*. 2. 2*. 3. καὶ 3* 17, συνημμένης ἀνακοινώσεως, καὶ μὲ τὰ σύμβολα τῆς παρούσης ἐργασίας, λαμβάνομεν τὴν διαφορικὴν μορφὴν τοῦ νόμου τοῦ Stokes :

$$d\varphi = -2{,}25\, a \eta\, \bar{e}^{\xi} u_s \sqrt{1 - c^2 \bar{c}^2} \cdot C\, dy^1 \cdot dy^2 \qquad (3.\ 9)$$

ὅπου $u_s$ ἡ σχετικὴ ταχύτης εἰς τὸ σημεῖον M, ἤτοι :

$u_a = \dfrac{\omega r R}{\lambda}$ : ταχύτης ἀέρος καὶ κέντρου σφαίρας N (r, R)

$u_M = \dfrac{\omega}{\lambda}(r + x^3)(R - x^2)$ : » » εἰς τὸ σημεῖον M τῆς ἐπιφανείας.

$u_s = u_M - u_a$ : σχετικὴ ταχύτης εἰς M (3. 10)

Ἐκ τῶν 3. 4 καὶ 3. 10 λαμβάνομεν :

$$u_s = \frac{\omega}{\lambda}(Rx^3 - rx^2 - x^2 x^3) = \frac{\omega a}{\lambda}(RS - r C \bar{S} - a C S \bar{S}) \qquad (3.\ 11)$$

Θέτομεν :

$$A = -2{,}25\, a^2 \eta\, \bar{e}^{z} \frac{\omega}{\lambda}, \quad dm_1 = dm_2^3 + dm_3^2,$$

$$dm_2 = dm_3^1 + dm_1^3, \quad dm_3 = dm_2^1 + dm_1^2$$

καὶ ἐκ τῶν σχέσεων 3. 6, 3. 9, καὶ 3. 11 αἱ 3. 7 καὶ 3. 8 γράφονται :

$$\left.\begin{aligned}
d\varphi_1 &= A(RS - rC\bar{S} + a\, CS\bar{S})(1 - C^2\bar{C}^2)\, C\, dy^1 \cdot dy^2 \\
d\varphi_2 &= -A(RS - rC\bar{S} + a\, CS\bar{S})\, C^3 \bar{C} \bar{S} \cdot dy^1 \cdot dy^2 \\
d\varphi_3 &= -A(RS - rC\bar{S} + a\, CS\bar{S})\, C^2 \bar{C} S \cdot dy^1 \cdot dy^2 \\
dm_1 &= -A \cdot a(RS - rC\bar{S} + aCS\bar{S})\, [C^2 \bar{S} \bar{C} S - CS\bar{C} C\bar{S}]\, dy^1 \cdot dy^2 = 0 \\
dm_2 &= -A \cdot a(RS - rC\bar{S} + a\, CS\bar{S})\, CS\, dy^1 \cdot dy^2 \\
dm_3 &= -A \cdot a(RS - rC\bar{S} + a\, CS\bar{S})\, C^2 \bar{S}\, dy^1 \cdot dy^2
\end{aligned}\right\} \qquad (3.\ 12)$$

Ἐὰν m καὶ n δύο ἀκέραιοι θετικοὶ ἀριθμοί, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ ἕνας τοὐλάχιστον περιττός, ἔχομεν :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} C^m \cdot S^n \cdot dy^1 = 0 \quad \text{καὶ} \quad \int_0^{2\pi} (\overline{C})^m (\overline{S})^n \cdot dy^2 = 0 \tag{3.13}$$

Ὁλοκληρώνομεν τὰς 3. 12 ἐντὸς τῶν ὁρίων $-\frac{\pi}{2}$ καὶ $\frac{\pi}{2}$ διὰ $y^1$ καὶ 0 ἕως $2\pi$ διὰ $y^2$, λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὰς 3. 13 :

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1 &= A\,[R(0) - r(0) + a(0)] = 0 \\
\varphi_2 &= -A\,[R(0) - r(0) + a(0)] = 0 \\
\varphi_3 &= -A\,[R(0) - r(0) + a(0)] = 0 \\
m_1 &= 0 \\
m_2 &= -A \cdot a \left[R \cdot \frac{2}{3}\, 2\pi - r(0) + a(0)\right] = -3\,\pi a^3 \eta\, \bar{e}^{\xi}\, \frac{\omega r}{\lambda} \\
m_3 &= -A \cdot a \left[R(0) - r\, \frac{4}{3} \cdot \pi + a(0)\right] = -3\,\pi a^3 \eta\, \bar{e}^{\xi}\, \frac{\omega r}{\lambda}
\end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

3. 3. Θεωροῦμεν ἀμελητέαν τὴν μεταβατικὴν περίοδον διὰ τὴν ἀποκατάστασιν τῶν ταχυτήτων $\Omega_2$ καὶ $\Omega_3$, ἐκ τῶν ροπῶν $m_2$ καὶ $m_3$. Ἑπομένως, διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν ὡς ἄνω ταχυτήτων, ἔχομεν νὰ προσδιορίσωμεν μόνον τὴν ροπὴν ἀντιστάσεως $m_R$ ἐκ τῆς περιστροφῆς σφαίρας.

Ἡ στοιχειώδης ἀντίστασις $d\varphi_R$, σχ. 5, εἶναι, εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, ἐφαπτομένη εἰς τὸν κύκλον C παράλληλον τοῦ ἐπιπέδου $Nx^1 x^2$, ἑπομένως ἡ σχέσις 2*. 12 γράφεται :

$$U = V e^{-\frac{2{,}25}{a}(w-a)} \tag{3.15}$$

Ἐκ τῆς σχέσεως 2.* 3, ἐκ τῆς παραγώγου

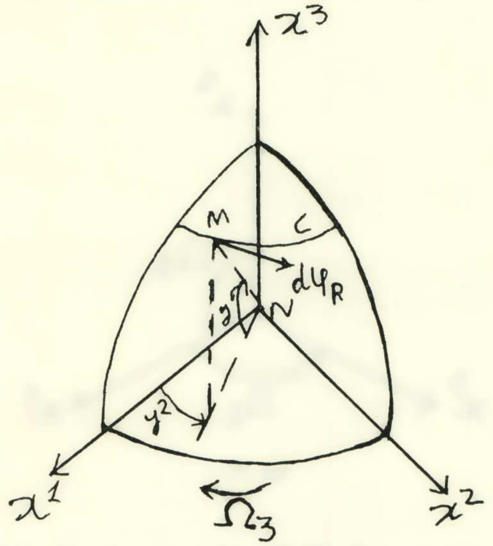
$$\left(\frac{\partial U}{\partial w}\right)_{w=0} = -\frac{2{,}25}{a} V \tag{3.15a}$$

καὶ ἐκ τῶν σχέσεων :

$$V = \Omega_3 a \cos y^1, \quad dS = (a \cos y^1 \cdot dy^2)\,(a\, dy^1)$$

λαμβάνομεν :

$$d\varphi_R = -\eta\left(\frac{-2{,}25}{a}\Omega_3 a \cos y^1\right)(a^2 \cos y^1 \cdot dy^1 \cdot dy^2) =$$
$$= 2{,}25\,\eta a^2 \Omega_3 \cos^2 y^1 \cdot dy^1 \cdot dy^2$$




Σχ. 5.

καὶ ἡ στοιχειώδης ῥοπὴ ἀντιστάσεως :

$$dm_R = -d\varphi\,(a \cdot \cos y^1) = -2{,}25\,\eta\, a^3 \Omega_3 \cos^3 y^1 \cdot dy^1 \cdot dy^2 \qquad (3.16)$$

$$\text{'Αλλά :} \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 y^1\, dy^1 = \frac{4}{3} \qquad \text{καὶ} \quad \int_0^{2\pi} dy^2 = 2\pi \qquad (3.16)$$

ἑπομένως ἡ ὁλοκλήρωσις τῆς 3.16 μᾶς δίδει :

$$m_R = = -6\,\pi\,\eta\, a\,(a\,\Omega_3)\, a$$

καὶ διὰ ῥευστὸν ἀσυνεχοῦς δομῆς :

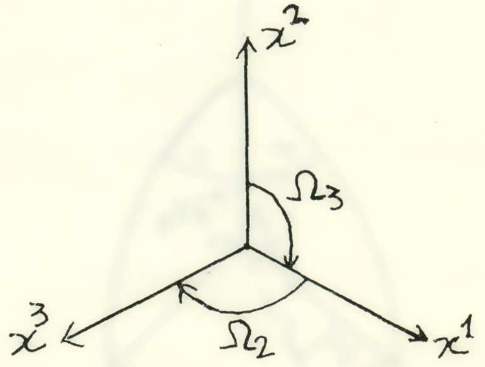
$$m_R = -\,6\,\pi\,\eta\, a^3 \Omega_3\, e^{-\xi} \qquad (3.17)$$

Ἡ σχέσις αὕτη ἰσχύει καὶ διὰ τὴν ῥοπὴν ἀντιστάσεως ἐκ τῆς $\Omega_2$

Ἐξισώνοντες τὰς σχέσεις 3. 14 καὶ 3. 17, εὑρίσκομεν :

$$\Omega_2 = \frac{\omega R}{2\lambda}, \quad \Omega_3 = \frac{\omega r}{2\lambda} \tag{3.18}$$

Ἐφ᾽ ὅσον $\Omega_2$ καὶ $\Omega_3$ θετικαί, ἡ φορά τους εἶναι ἡ τοῦ σχήματος 6.




Σχ. 6.

Παρ᾽ ὅλον ὅτι τὸ $m_1 = 0$ θὰ θεωρήσωμεν τὴν $\Omega_1 \neq 0$, διὰ νὰ λάβωμεν ὑπ᾽ ὄψιν μας τὴν γυροσκοπικὴν ῥοπὴν στρέψεως, ἐὰν διαπιστώσωμεν ὅτι ὑπάρχει.

## 4. ΒΑΘΜΙΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

4. 1. Θὰ προσδιορίσωμεν κατ᾽ ἀρχὴν τὴν ἔκφρασιν τῆς κινητικῆς ἐνεργείας ἑνὸς σφαιριδίου στρεφομένου περὶ ἕνα ἄξονα $OY^2$ μὲ ταχύτητα $\bar{\omega} = \frac{\omega R}{\lambda}$ καὶ περὶ τοὺς ἄξονας $Ox^1$, $Ox^2$, $Ox^3$, σχ. 7 μὲ τὰς ταχύτητας $\Omega_1$, $\Omega_2$, $\Omega_3$.

Θέτομεν χάριν συντομογραφίας :

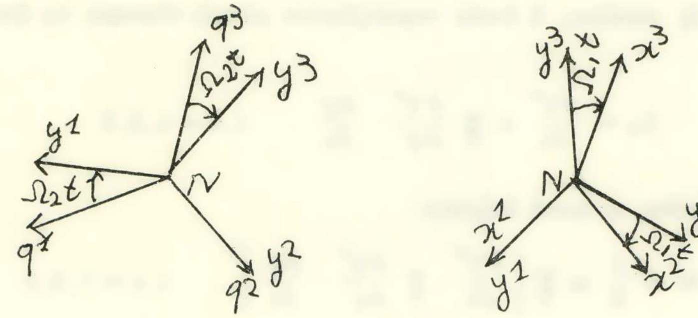
$$\begin{array}{lll} \Psi_1 = \sin\Omega_1 t, & \Psi_2 = \sin\Omega_2 t, & \Psi_3 = \sin\Omega_3 t \\ \bar{\Psi}_1 = \cos\Omega_1 t, & \bar{\Psi}_2 = \cos\Omega_2 t, & \bar{\Psi}_3 = \cos\Omega_3 t \\ S = \sin\alpha, & \bar{S} = \sin\beta, & \Psi_4 = \sin\bar{\omega} t \\ C = \cos\alpha, & \bar{C} = \cos\beta, & \bar{\Psi}_4 = \cos\bar{\omega} t \end{array}$$

Ἐν συνεχεία πραγματοποιοῦμεν τὰς διαδοχικὰς ἀλλαγὰς ἀξόνων σχημάτων 7 καὶ εὑρίσκομεν :

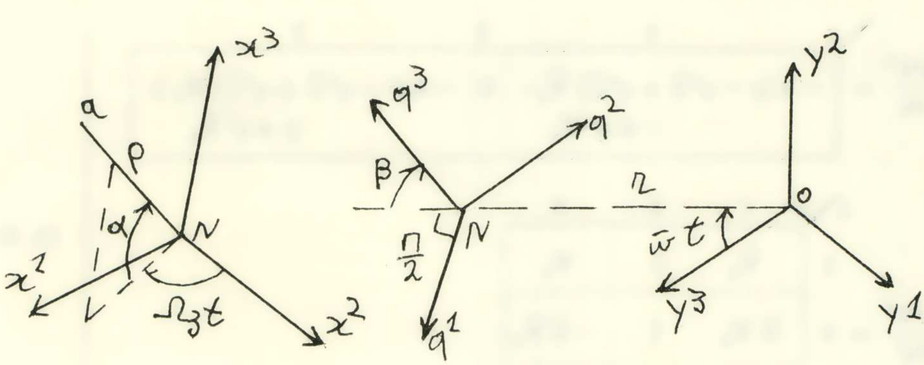
$$\Sigma\chi.\ 7\alpha:\quad q^1 = y^1\,\overline{\Psi}_2 - y^3\,\Psi_2\,,\quad q^2 = y^2\,,\quad q^3 = y^1\,\Psi_2 + y^3\,\overline{\Psi}_2 \qquad (4.\ 1)$$

$$\Sigma\chi.\ 7\beta:\quad y^1 = x^1\,,\quad y^2 = x^2\,\overline{\Psi}_1 + x^3\,\Psi_1\,,\quad y^3 = x^3\,\overline{\Psi}_1 - x^2\,\Psi_1 \qquad (4.\ 2)$$

$$\Sigma\chi.\ 7\gamma:\quad x^1 = \varrho\,C\,\Psi_3\,,\quad x^2 = \varrho\,C\,\overline{\Psi}_3\,,\quad x^3 = \varrho\,S \qquad (4.\ 3)$$




α β




γ δ

Σχ. 7.

Ἐκ τοῦ Σχ. 7δ :

$$\left.\begin{aligned} & Y^1 = -(r - q^2 S + q^3\,\overline{C})\,\Psi_4 + q^1\,\overline{\Psi}_4\,,\quad Y^2 = q^2\,\overline{C} + q^3\,\overline{S} \\ & Y^3 = (r - q^2\,\overline{S} + q^3\,\overline{C})\,\overline{\Psi}_4 + q^1\,\Psi_4 \end{aligned}\right\} \qquad (4.\ 4)$$

Ἐκ τῶν σχέσεων 4. 1, 4. 2, καὶ 4. 3 λαμβάνομεν :

$$\left.\begin{aligned} & q^1 = \varrho\,C\,\Psi_3\,\overline{\Psi}_2 - \varrho\,S\,\overline{\Psi}_1\,\Psi_2 + \varrho\,C\,\overline{\Psi}_3\,\Psi_1\,\Psi_2 \\ & q^2 = \varrho\,C\,\overline{\Psi}_1\,\overline{\Psi}_3 + \varrho\,S\,\Psi_1 \\ & q^3 = \varrho\,C\,\Psi_3\,\Psi_2 + \varrho\,S\,\overline{\Psi}_1\,\overline{\Psi}_2 - \varrho\,C\,\overline{\Psi}_3\,\Psi_1\,\overline{\Psi}_2 \end{aligned}\right\} \qquad (4.\ 5)$$

4. 2. Ἐὰν δ ἡ εἰδικὴ μᾶζα τῆς σφαίρας, ἡ μᾶζα στοιχειώδους στεφάνης εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς σφαίρας, θὰ εἶναι :

$$dm = \delta\,(2\pi\varrho\cos\alpha)\,(\varrho\, d\alpha)\cdot d\varrho = 2\pi\varrho^2\delta\, C\, d\alpha\cdot d\varrho \qquad (4.\ 6)$$

Ἐὰν ὑποθέσωμεν τὸ α ἱκανῶς μικρὸν ὥστε νὰ δυνάμεθα νὰ δεχθῶμεν τὸ u σταθερὸν καθ' ὅλην τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, αἱ συνιστῶσαι τῆς ὁλικῆς ταχύτητος τῆς σφαίρας, ἡ ὁποία περιστρέφεται μὲ τὰς τέσσαρες ὡς ἄνω ταχύτητες εἶναι :

$$U_\varkappa = \frac{\partial Y^\varkappa}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial Y^\varkappa}{\partial q^i}\cdot\frac{\partial q^i}{\partial t}\,, \qquad i, \varkappa = 1, 2, 3$$

καὶ ἡ στοιχειώδης κινητικὴ ἐνέργεια :

$$dW = \frac{1}{2}\, m \sum_\varkappa \left[\frac{\partial Y^\varkappa}{\partial t}\cdot\sum_i \frac{\partial Y^\varkappa}{\partial q^i}\cdot\frac{\partial q^i}{\partial t}\right]^2, \qquad i, \varkappa = 1, 2, 3 \qquad (4.\ 7)$$

Ἡ παραγώγησις τῶν 4. 4 καὶ 4. 5 μᾶς δίδει :

$$\left.\begin{array}{l}
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{c|c|c} \diagdown\varkappa\quad 1 & 2 & 3 \end{array} \\
\dfrac{\partial Y^\varkappa}{\partial t} = & \left|\begin{array}{c|c|c} -\varpi\,(r - q^2\bar{S} + q^3\bar{C})\,\bar{\Psi}_4 - & 0 & -\varpi\,(r - q^2\bar{S} + q^3\bar{C})\,\Psi_4 + \\ -\varpi\, q^1\,\Psi_4 & & +\varpi\, q^1\,\bar{\Psi}_4 \end{array}\right|
\end{array} \\[2ex]
\begin{array}{ccc|c|c|c|}
 & & i\diagdown\varkappa & 1 & 2 & 3 \\ \hline
 & & 1 & \bar{\Psi}_4 & 0 & \Psi_4 \\ \hline
\dfrac{\partial Y^\varkappa}{\partial q^i} & = & 2 & \bar{S}\,\Psi_4 & \bar{C} & -\bar{S}\,\bar{\Psi}_4 \\ \hline
 & & 3 & -\bar{C}\,\Psi_4 & \bar{S} & \bar{C}\,\bar{\Psi}_4 \\ \hline
\end{array}
\end{array}\right\} \qquad (4.\ 8)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial q^1}{\partial t} = \varrho\,[\Omega_3 C\,\bar{\Psi}_3\,\bar{\Psi}_2 - \Omega_2 C\,\Psi_3\,\Psi_2 + \Omega_1 S\,\Psi_1\,\Psi_2 - \Omega_2 S\,\bar{\Psi}_1\,\bar{\Psi}_2 - \\
\qquad\qquad - \Omega_3 C\,\Psi_1\,\Psi_2\,\Psi_3 + \Omega_1 C\,\bar{\Psi}_3\,\bar{\Psi}_1\,\Psi_2 + \Omega_2 C\,\bar{\Psi}_3\,\Psi_1\,\bar{\Psi}_2\,] \\
\dfrac{\partial q^2}{\partial t} = -\,\varrho\,[\Omega_1 C\,\Psi_1\,\bar{\Psi}_3 - \Omega_3 C\,\bar{\Psi}_1\,\Psi_3 + \Omega_1 S\,\bar{\Psi}_1] \\
\dfrac{\partial q^3}{\partial t} = \varrho\,[\Omega_3 C\,\bar{\Psi}_3\,\Psi_2 + \Omega_2 C\,\Psi_3\,\bar{\Psi}_2 - \Omega_1 S\,\Psi_1\,\bar{\Psi}_2 - \Omega_2 S\,\bar{\Psi}_1\,\Psi_2 + \\
\qquad\qquad + \Omega_3 C\,\Psi_3\,\Psi_1\,\bar{\Psi}_2 - \Omega_1 C\,\bar{\Psi}_3\,\bar{\Psi}_1\,\bar{\Psi}_2 + \Omega_2 C\,\bar{\Psi}_3\,\Psi_1\,\Psi_2]
\end{array}\right\} \qquad (4.\ 8)$$

Ὅπως διαπιστώνομεν, ἐκ τῶν παραγώγων 4. 8, τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ ἀθροίσματος 4. 7, πρὸ πάσης ἁπλοποιήσεως, ἔχει 855 ὅρους. Διὰ νὰ ἀποφύγωμεν τὰς ἐπιμόνους πράξεις αἱ ὁποῖαι ὁδηγοῦν σὲ ἀναπόφευκτα σφάλματα, γράφομεν τὴν 4.7 ὑπὸ τανυστικὴν μορφήν :

$$dW = \frac{1}{2}\,dm\left[\delta_{ij}\frac{\partial Y^i}{\partial t}\cdot\frac{\partial Y^j}{\partial t} + g_{ij}\frac{\partial q^i}{\partial t}\cdot\frac{\partial q^j}{\partial t} + 2\sum\delta_{ij}\frac{\partial Y^i}{\partial t}\cdot\frac{\partial Y^j}{\partial q^\varkappa}\cdot\frac{\partial q^\varkappa}{\partial t}\right] \qquad (4.9)$$

σεβόμενοι τὴν συμβατικὴν γραφὴν τοῦ Einstein διὰ τὰ ἀθροίσματα, καὶ ὅπου :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = i \end{cases} \qquad : \text{σύμβολον τοῦ Kronecker}$$

$$g_{ij} = \delta_{\alpha\beta}\frac{\partial Y^\alpha}{\partial q^i}\,\frac{\partial Y^\beta}{\partial q^j} \qquad : \text{θεμελιώδης τανυστής.}$$

Εὐκόλως προσδιορίζομεν τὰς συνιστώσας τοῦ τανυστῆ $g_{ij}$ :

$$g_{ij} = \frac{\partial Y^1}{\partial q^i}\cdot\frac{\partial Y^1}{\partial q^j} + \frac{\partial Y^2}{\partial q^i}\cdot\frac{\partial Y^2}{\partial q^j} + \frac{\partial Y^3}{\partial q^i}\cdot\frac{\partial Y^3}{\partial q^j} \Longrightarrow$$

$$g_{ij} = \begin{array}{c|c|c|c|} i\diagdown j & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & \overline{\Psi}_4^2 + \Psi_4^2 & \overline{\Psi}_4\Psi_4\overline{S} - \Psi_4\overline{S}\,\overline{\Psi}_4 & -\overline{\Psi}_4\Psi_4\overline{C} + \Psi_4\overline{C}\,\overline{\Psi}_4 \\ \hline 2 & \overline{\Psi}_4\Psi_4\overline{S} - \Psi_4\overline{S}\,\overline{\Psi}_4 & \overline{S}^2\Psi_4^2 + \overline{C}^2 + \overline{S}^2\overline{\Psi}_4^2 & -\overline{S}\,\overline{C}\,\overline{\Psi}_4^2 + \overline{C}\,\overline{S} - \overline{S}\,\overline{C}\Psi_4^2 \\ \hline 3 & -\overline{\Psi}_4\Psi_4\overline{C} + \Psi_4\overline{C}\,\overline{\Psi}_4 & -\overline{S}\,\overline{C}\,\overline{\Psi}_4^2 + \overline{C}\,\overline{S} - \overline{S}\,\overline{C}\Psi_4^2 & \Psi_4^2\overline{C}^2 + \overline{S}^2 + \overline{C}^2\overline{\Psi}_4^2 \\ \hline \end{array} =$$

$$= \begin{array}{c|c|c|c|} i\diagdown j & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 3 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} = \delta_{ij} \qquad (4.10)$$

Ἐπίσης χρησιμοποιοῦμεν καὶ τὸ σύμβολον τοῦ Brillouin :

$$v_\varkappa = \delta_{ij}\frac{\partial Y^i}{\partial t}\cdot\frac{\partial Y^j}{\partial q^\varkappa} \qquad (4.11)$$

Κατόπιν τῆς 4. 10 γράφομεν :

$$g_{ij} \frac{\partial q^i}{\partial t} \cdot \frac{\partial q^j}{\partial t} = \delta_{ij} \frac{\partial q^i}{\partial t} \cdot \frac{\partial q^j}{\partial t} = \left( \frac{\partial q^\varkappa}{\partial t} \right)^2 \qquad (4.12)$$

Καὶ κατόπιν τῆς 4. 11 γράφομεν :

$$2 \sum_\varkappa \delta_{ij} \frac{\partial Y^i}{\partial t} \cdot \frac{\partial Y^j}{\partial q^\varkappa} \cdot \frac{\partial q^\varkappa}{\partial t} = 2 v_\varkappa \frac{\partial q^\varkappa}{\partial t} \qquad (4.13)$$

Λαμβάνοντας ὑπ' ὄψιν τὰς 4. 12 καὶ 4. 13 ἡ 4. 9 γράφεται :

$$dW = \frac{1}{2} dm \sum_\varkappa \left[ \left( \frac{\partial Y^\varkappa}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial q^\varkappa}{\partial t} \right)^2 + 2 v_\varkappa \frac{\partial q^\varkappa}{\partial t} \right] \qquad (4.14)$$

Ἡ ἐνέργεια 4. 14 εἶναι συνάρτησις τοῦ χρόνου διότι περιλαμβάνει γινόμενα τῶν ἡμιτονοειδῶν συναρτήσεων $\Psi_i$, $i = 2, 3, 4$ (Τὰς $\Psi_1$, $\overline{\Psi}_1$ δὲν τὰς θεωροῦμεν ὡς συναρτήσεις χρόνου, διότι δὲν γνωρίζομεν ἀκόμη ἂν ὑπάρχῃ γυροσκοπικὴ ροπή). Ἕκαστον τῶν γινομένων τούτων χαρακτηρίζεται ἀπὸ μίαν συχνότητα $\frac{\Omega p}{2\pi}$. Ἐὰν τὰς συναρτήσεις ταύτας τὰς χωρίσωμεν εἰς ὀρθογωνικὰς (Orthogonales) καὶ κανονικὰς (Normées), δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὰς μέσας τιμὰς εἰς τὴν περίοδον :

1) $$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_i^m \ldots \Psi_j^n \cdot \overline{\Psi}_i^l \ldots \overline{\Psi}_j^\varkappa \cdot d(\Omega p t) = 0$$

ὅταν ἕνας τοὐλάχιστον ἐκθέτης περιττός. Ὀ ρ θ ο γ ω ν ι κ ὴ σ υ ν / σ ι ς.

2) $$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q^i \frac{\partial q^i}{\partial t} d(\Omega p t) = 0$$ Ὀ ρ θ ο γ ω ν ι κ ὴ σ υ ν ά ρ τ η σ ι ς

3) $$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_i^2 \ldots \Psi_j^2 \cdot \overline{\Psi}_1^2 \ldots \overline{\Psi}_\varkappa^2 \cdot d(\Omega p t) = \frac{1}{2^n}$$

ὅπου n τὸ πλῆθος τῶν παραγόντων. Κ α ν ο ν ι κ ὴ σ υ ν ά ρ τ η σ ι ς.

Γράφομεν τὴν μέσην τιμήν, εἰς τὸν χρόνον, τῆς ἐνέργεις 4. 14

$$d\overline{W} = \frac{1}{2} dm \sum_\varkappa \overline{\left[ \left( \frac{\partial Y^\varkappa}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial q^\varkappa}{\partial t} \right)^2 + 2 v_\varkappa \frac{\partial q^\varkappa}{\partial t} \right]} \qquad (4.15)$$

Ἐν συνεχείᾳ εὑρίσκομεν τὰς συνιστώσας τοῦ $v_\varkappa$ :

$$\begin{array}{c|c|c|c|} \diagdown\varkappa & 1 & 2 & 3 \\ \hline v_\varkappa = & -\varpi(r - q^2\bar{S} + q^3\bar{C}) & -\varpi q^1 \bar{S} & \varpi \cdot q^1 \bar{C} \\ \hline \end{array}$$

Ἀκολούθως προσδιορίζομεν τοὺς ὅρους τῆς 4.15 :

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{\varkappa}^{1,2,3}\overline{\left(\frac{\partial Y^\varkappa}{\partial t}\right)^2} = \varpi^2\left[r^2 + (q^2)^2\cdot\bar{S}^2 + (q^3)^2\bar{C}^2 + (q^1)^2 + 2r\varrho S\bar{S}\Psi_1\right] = \\
&= \varpi^2\Big[r^2 + \frac{1}{2}\varrho^2 C^2\bar{S}^2\bar{\Psi}_1^2 + \varrho^2 S^2\bar{S}^2\Psi_1^2 + \frac{1}{4}\varrho^2 C^2\bar{C}^2 + \\
&+ \frac{1}{2}\varrho^2 S^2\bar{C}^2\bar{\Psi}_1^2 + \frac{1}{4}\varrho^2 C^2\bar{C}^2\bar{\Psi}_1^2 + \frac{1}{4}\varrho^2 C^2 + \frac{1}{2}\varrho^2 S^2\bar{\Psi}_1^2 + \\
&+ \frac{1}{4}\varrho^2 C^2\bar{\Psi}_1^2 + 2r\varrho S\bar{S}\Psi_1\Big] \\
&\sum_{\varkappa}^{1,2,3}\overline{\left(\frac{\partial q^\varkappa}{\partial t}\right)^2} = \varrho^2\Big[\Omega_1^2\Big(S^2\Psi_1^2 + \frac{1}{2}C^2\bar{\Psi}_1^2 + \frac{1}{2}C^2\Psi_1^2 + S^2\bar{\Psi}_1^2\Big) + \\
&+ \Omega_2^2\Big(\frac{1}{2}C^2 + S^2\bar{\Psi}_1^2 + \frac{1}{2}C^2\Psi_1^2\Big) + \Omega_3^2\Big(\frac{1}{2}C^2 + \frac{1}{2}C^2\Psi_1^2 + \\
&+ \frac{1}{2}C^2\bar{\Psi}_1^2\Big)\Big] = \varrho^2\Big[\frac{1}{2}\Omega_1^2(1+S^2) + \Omega_2^2\Big(\frac{1}{2}C^2 + S^2\bar{\Psi}_1^2 + \\
&+ \frac{1}{2}C^2\Psi_1^2\Big) + \Omega_3^2 C^2\Big] \\
&2\sum_{\varkappa}^{1,2,3}\overline{v_\varkappa\frac{\partial q^\varkappa}{\partial t}} = -2\varpi\Big[r\frac{\partial q^1}{\partial t} - \bar{S}q^2\frac{\partial q^1}{\partial t} + q^3\bar{C}\frac{\partial q^1}{\partial t} + \bar{S}q^1\frac{\partial q^2}{\partial t} - \\
&- \bar{C}q^1\frac{\partial q^3}{\partial t}\Big] = -2\varpi\Big[-\varrho^2 C^2 C\frac{1}{4}\Omega_2 - \varrho^2 S^2\Omega_2\frac{1}{4}C - \\
&- \varrho^2 C^2\bar{C}\Omega_2\frac{1}{4}\Psi_1^2 - \varrho^2\bar{C}C^2\Omega_2\frac{1}{4} - \varrho^2\bar{C}S^2\frac{1}{2}\bar{\Psi}_1^2\Omega_2 - \\
&- \varrho^2\bar{C}C^2\Omega_2\frac{1}{4}\Psi_1^2\Big] = 2\varrho^2\bar{C}\Omega_2\varpi\Big[\frac{1}{4}C^2 + \frac{1}{4}S^2 + \frac{1}{4}C^2\Psi_1^2 + \\
&+ \frac{1}{4}C^2 + \frac{1}{2}S^2\bar{\Psi}_1^2 + \frac{1}{4}C^2\Psi_1^2\Big] = \\
&= \varrho^2 C\Omega_2\varpi\Big[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}C^2 + C^2\Psi_1^2 + S^2\bar{\Psi}_1^2\Big]
\end{aligned}\right\}\quad (4.16)$$

᾿Αντικαθιστῶντες τὰς παραστάσεις 4. 6 καὶ 4. 16 εἰς τὴν 4. 15 ἔχομεν :

$$\left.\begin{aligned} d\overline{W} = \pi\,\delta\,\varrho^2 C\, d\alpha \cdot d\varrho \,\Bigl\{ \overline{\omega}^2 \Bigl[ & r^2 + \varrho^2 C^2 \Bigl( \frac{1}{2}\overline{S}^2\overline{\Psi}_1^2 + \frac{1}{4}\overline{C}^2 + \frac{1}{4}\overline{C}^2\Psi_1^2 + \\ & + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\Psi_1^2 \Bigr) + \varrho^2 S^2 \Bigl( \overline{S}^2\Psi_1^2 + \frac{1}{2}\overline{C}^2\overline{\Psi}_1^2 + \frac{1}{2}\Psi_1^2 \Bigr) + \\ & + \varrho S \cdot 2 r \overline{S}\Psi_1 \Bigr] + \Bigl[ \varrho^2 \frac{1}{2}\Omega_1^2 + \varrho^2 S^2 \Bigl( \frac{1}{2}\Omega_1^2 + \Omega_2^2\overline{\Psi}_1^2 \Bigr) + \\ & + \varrho^2 C^2 \Bigl( \frac{1}{2}\Omega_2^2 + \frac{1}{2}\Omega_2^2\Psi_1^2 + \Omega_3^2 \Bigr) \Bigr] + \overline{C}\,\Omega_2\,\overline{\omega} \Bigl[ \varrho^2 \frac{1}{2} + \\ & + \varrho^2 C^2 \Bigl( \frac{1}{2} + \Psi_1^2 \Bigr) + \varrho^2 S^2 \overline{\Psi}_1^2 \Bigr] \Bigr\} \end{aligned}\right\} \quad (4.17)$$

᾿Εν συνεχείᾳ ὁλοκληρώνομεν τὴν 4. 17 ἀπὸ 0 ἕως α διὰ τὸ ρ καὶ ἀπὸ $-\frac{\pi}{2}$ ἕως $\frac{\pi}{2}$ διὰ τὸ α καὶ λαμβάνομεν :

$$\left.\begin{aligned} \overline{W} = \pi\,\delta \Bigl\{ \overline{\omega}^2 \Bigl[ & r^2 \frac{a^3}{3} \cdot 2 + \frac{a^5}{5} \cdot \frac{4}{3} \Bigl( \frac{1}{2}\overline{S}^2\overline{\Psi}_1^2 + \frac{1}{4}\overline{C}^2 + \frac{1}{4}\overline{C}^2\Psi_1^2 + \\ & + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\Psi_1^2 \Bigr) + \frac{a^5}{5} \cdot \frac{2}{3} \Bigl( \overline{S}^2\Psi_1^2 + \frac{1}{2}\overline{C}^2\overline{\Psi}_1^2 + \frac{1}{2}\overline{\Psi}_1^2 \Bigr) \Bigr] + \\ & + \frac{a^5}{5} \Bigl[ \Omega_1^2 + \frac{1}{3}\Omega_1^2 + \frac{2}{3}\Omega_2^2\overline{\Psi}_1^2 + \frac{2}{3}\Omega_2^2 + \frac{2}{3}\Omega_2^2\Psi_1^2 + \frac{4}{3}\Omega_3^2 + \\ & + \overline{\omega}\,\Omega_2\,\overline{C} + \frac{2}{3}\overline{\omega}\,\Omega_2\,\overline{C} + \frac{4}{3}\overline{\omega}\,\Omega_2\,\overline{C}\,\Psi_1^2 + \frac{2}{3}\overline{\omega}\,\Omega_2\,\overline{C}\,\overline{\Psi}_1^2 \Bigr] \Bigr\} \end{aligned}\right\} \quad (4.18)$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ Ω πρέπει νὰ προσδιορίσωμεν τὴν γυροσκοπικὴν ροπὴν στρέψεως, ὡς πρὸς τὸν ἄξονα $Nq^1$, ἡ ὁποία δίδεται ὑπὸ τῆς παραγώγου τῆς ἐνεργείας ὡς πρὸς τὴν γωνίαν στρέψεως :

$$\left.\begin{aligned} m_g = \frac{\partial\overline{W}}{\partial\beta} = \pi\,\delta \Bigl\{ \overline{\omega} \Bigl[ & \frac{4a^5}{15} \Bigl( \overline{S}\,\overline{C}\,\overline{\Psi}_1^2 - \frac{1}{2}\overline{C}\,\overline{S} - \frac{1}{2}\overline{C}\,\overline{S}\,\Psi_1^2 + \overline{S}\,\overline{C}\,\Psi_1^2 - \\ & - \frac{1}{2}\overline{C}\,\overline{S}\,\overline{\Psi}_1^2 \Bigr) \Bigr] - \overline{S}\,\overline{\omega}\,\Omega_2 \frac{a^5}{5} \Bigl( 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\Psi_1^2 + \frac{2}{3}\overline{\Psi}_1^2 \Bigr) \Bigr\} \end{aligned}\right\} \quad (4.19)$$

Εἰς τὴν περίπτωσίν μας ἔχομεν $\beta = 0$, ἄρα $\overline{S} = \sin\beta = 0$, ὁπότε ἡ 4. 19 μᾶς δίδει : $m_g = 0$. Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι μόνον αἱ ταχύτητες ω καὶ $\Omega_2$

πρέπει νὰ ἔχουν παραλλήλους ἄξονας καὶ ὅτι ἡ ταχύτης $\Omega_3$ δὲν δημιουργεῖ γυροσκοπικὸν ζεῦγος. Ἑπομένως ἔχομεν :

$$m_1 = 0\ ,\ m_g = 0\ \Longrightarrow \Omega_1 = 0\ \Longrightarrow \bar{S} = 0\ ,\ \ \bar{C} = 1\ ,\ \Psi_1 = 0\ ,\ \overline{\Psi} = 1$$

καὶ 4.18 γράφεται :

$$\left.\begin{aligned} \overline{W} = \pi\delta \Big\{ \varpi^2 \left[\frac{r^2 a^3 2}{3} + \frac{4a^5}{15}\left(\frac{2}{4}\right) + \frac{2a^5}{15}(1)\right] + \\ + \frac{a^5}{5}\left[\frac{4}{3}\Omega_2^2 + \frac{4}{3}\Omega_3^2 + \frac{7}{3}\varpi\,\Omega_2\right]\Big\} \end{aligned}\right\} \quad (4.20)$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν 4.20 τὰς ταχύτητας μὲ τὰς τιμάς τους :

$$\varpi = \frac{\omega R}{\lambda}\ ,\quad \Omega_2 = \frac{\omega R}{2\lambda}\ ,\quad \Omega_3 = \frac{\omega r}{2\lambda}$$

λαμβάνομεν :

$$\overline{W} = \frac{2}{3}\pi a^3 \delta \left\{ \frac{\omega^2 R^2}{\lambda^2}\left[r^2 + \frac{a^2}{5} + \frac{a^2}{5} + \frac{a^2}{5}\cdot\frac{2}{4} + \frac{7}{4}\cdot\frac{a^2}{5}\right] + \frac{\omega^2 r^2 a^2}{2\lambda^2 5}\right\} =$$

$$= \frac{2}{3}\pi a^3 \delta \left[\frac{\omega^2 R^2}{\lambda^2}\left(r^2 + \frac{17}{20}a^2\right) + \frac{\omega^2 r^2 a^2}{10\lambda^2}\right]$$

ἀλλὰ $m = \frac{4}{3}\ \pi\alpha^3\delta$ , μᾶζα σφαίρας, καὶ ἡ ἐνέργεια γράφεται :

$$\overline{W} = \frac{1}{2}\,\frac{m\,\omega^2}{\lambda^2}\left(r^2 R^2 + a^2\,\frac{17R^2 + 2r^2}{20}\right) \qquad (4.21)$$

4.3. Ἡ βαθμὶς τῆς κινητικῆς ἐνεργείας 4.21 γράφεται :

$$\overrightarrow{\operatorname{grad} \overline{W}} = \overrightarrow{\frac{\partial \overline{W}}{\partial r}} + \overrightarrow{\frac{\partial \overline{W}}{\partial R}} = \vec{F}_r + \vec{F}_R \qquad (4.22)$$

ἡ ὁποία μᾶς δίδει :

$F_r = \dfrac{m\,\omega^2 r\,(R^2 + 0{,}1a^2)}{\lambda^2}$ : φυγόκεντρος δύναμις

διὰ $R = \lambda$ καὶ $\alpha \ll \lambda \Longrightarrow F_r = m\omega^2 r$

$$\boxed{F_R = \frac{m\,\omega^2 R\,(r^2 + 0{,}85\,a^2)}{\lambda^2}} \ :\ \text{Ὀρθοφυγόκεντρος δύναμις.} \qquad (4.23)$$

## 5. ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ ΣΦΑΙΡΑΣ ΑΤΟΜΙΚΩΝ ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ

5. 1. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν $\alpha \ll r$ καὶ αἱ 4. 21 καὶ 4. 23 γράφονται :

$$\overline{W} = \frac{1}{2} m \frac{\omega^2 R^2 r^2}{\lambda^2}, \quad F_R = \frac{m\omega^2 r^2 R}{\lambda^2} \tag{5. 1}$$

Σκοπός μας εἶναι νὰ προσδιορίσωμεν τὰς κβαντικὰς τιμὰς ποὺ δύναται νὰ λάβῃ ἡ ἐνέργεια $\overline{W}$ καὶ ἡ δύναμις $F_R$ διὰ μίαν ὡρισμένην τιμὴν τοῦ r.

Δεχόμεθα ὅτι ἡ ἐνέργεια $\overline{W}$ ἀκολουθεῖ τοὺς νόμους τῆς κυματομηχανικῆς, ἤτοι ὅτι ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωσιν τοῦ Schrödinger :

$$\Delta\Psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} \overline{W}\,\Psi = 0, \text{ ὅπου h σταθερὰ τοῦ Planck} \tag{5. 2}$$

Ἐφ' ὅσον $r = C^{te}$, ἔχομεν εἰς πολικὰς συντεταγμένας :

$$\Delta\Psi = \frac{1}{r^2}\frac{d^2\Psi}{d\gamma^2}, \text{ ὅπου } \gamma = \omega t \text{ ἡ γωνία περισ/φης} \tag{5. 3}$$

καὶ ἡ 5. 2 γράφεται :

$$\frac{d^2\Psi}{d\gamma^2} + \frac{8\pi^2 m r^2 \overline{W}}{h^2}\Psi = 0 \tag{5. 4}$$

Θέτομεν :

$$\varkappa^2 = \frac{8\pi^2 m r^2 \overline{W}}{h^2} \tag{5. 5}$$

καὶ ἡ 5. 4 γράφεται :

$$\frac{d^2\Psi}{d\gamma^2} + \varkappa^2\Psi = 0 \tag{5. 6}$$

Ἡ χαρακτηριστικὴ ἐξίσωσις τῆς διαφορικῆς τοιαύτης 5. 6 εἶναι : $Z(p) = p^2 + \varkappa^2$, ὅπου p ὁ ἐκτελεστὴς παραγωγήσεως τοῦ Heaviside.

Ἀπὸ τοὺς πίνακας τοῦ συμβολικοῦ λογισμοῦ λαμβάνομεν :

$$\frac{1}{p^2 + \varkappa^2} = \frac{1}{\varkappa}\sin \varkappa\gamma$$

καὶ ἡ λύσις τῆς 5. 6 εἶναι :

$$\Psi = C \sin \varkappa\gamma \qquad (C = C^{te}) \tag{5. 7}$$

Ἐφ' ὅσον r σταθερά, ἡ φυσικὴ πραγματικότης ἀπαιτεῖ ὅπως δι' ἑκάστην τιμὴν τοῦ R τὸ φαινόμενον εἶναι περιοδικόν :

$$\Psi(\gamma) = \Psi(\gamma + 2\pi) \quad \text{ἤτοι :} \quad \sin(\varkappa\gamma) = \sin(\varkappa\gamma + 2\varkappa\pi) \qquad (5.8)$$

Ἡ πλήρωσις τῆς ταυτότητος 5. 8 συνεπάγεται ὅτι τὸ κ εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός, θετικὸς ἢ ἀρνητικός. Ἡ 5. 5 γράφεται :

$$\overline{W} = \varkappa^2 \frac{h^2}{8\pi^2 m r^2} \qquad (5.9)$$

Ἐκ τῶν σχέσεων 5. 1 καὶ 5. 9 λαμβάνομεν τὰς τιμὰς ποὺ δύναται νὰ λάβῃ τὸ R :

$$\frac{1}{2} \frac{m\omega^2 r^2 R_\varkappa^2}{\lambda^2} = \varkappa^2 \frac{h^2}{8\pi^2 m r^2} \Longrightarrow R_\varkappa = \varkappa \frac{h\lambda}{2\pi m \omega r^2} \qquad (5.10)$$

Ἀντικαθιστῶντες τὸ $R_\varkappa$ εἰς τὴν ἔκφρασιν τοῦ $F_R$ (5. 1), ἔχομεν :

$$(F_R)_\varkappa = \frac{m\omega^2 r^2}{\lambda^2} \cdot \varkappa \frac{h\lambda}{2\pi m \omega r^2} = \varkappa \frac{h\omega}{2\pi\lambda} \qquad (5.11)$$

Ἐὰν ν ἡ συχνότης τοῦ φαινομένου : $\omega = 2\pi\nu$, ἡ 5. 11 γράφεται :

$$\boxed{(F_R)_\varkappa = \varkappa \frac{h\nu}{\lambda}}$$

Ἤτοι ἡ ὀρθοφυγόκεντρος δύναμις τῶν μορίων ἑνὸς ἀερίου, ἐντὸς ἀέρος περιστρεφομένου ὑπὸ τὰς συνθήκας τῆς παρούσης ἐργασίας, ἰσοῦται μὲ ἀκέραιον πολλαπλάσιον τῆς κβαντικῆς ἐνεργείας hν, διὰ τοῦ ἀξονικοῦ μήκους κύματος τῆς ταχύτητος.

## ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Διὰ καταλλήλου ἐπιλογῆς τῶν διαφόρων ὡς ἄνω παραμέτρων, π. χ. $r_{Max} > R_{Max} = \lambda$, δυνάμεθα νὰ ἐπιτύχωμεν, σὲ μίαν περιστροφικὴν κίνησιν, ἀξονικὴν δύναμιν πολὺ μεγαλυτέραν τῆς φυγοκέντρου καὶ καθέτου πρὸς αὐτήν.

Ἡ νέα λοιπὸν αὕτη δύναμις δύναται νὰ ἔχῃ διαφόρους ἐφαρμογάς, ἐν συνδυασμῷ μετὰ τῆς φυγοκέντρου, ὅπως ἐπὶ παραδείγματι εἰς τὴν κατασκευὴν ἑνὸς ἁπλοῦ καὶ ἀποδοτικοῦ φίλτρου κόνεως.

RÉSUMÉ

Une particule sphérique située dans un éspace où l'air est en mouvement de rotation $\omega$, telle que la vitesse linéaire u soit fonction du rayon r et de la distance axiale R, prendra une vitesse fonction des coordonnées r et R, ainsi que l'énergie acquise par la sphére :

$$W = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \frac{R^2}{d^2}$$

où m la masse de la sphére et d la longueur d'onde axiale de la vitesse

Le gradient de l'énergie est :

$$\overrightarrow{\text{grad}\,W} = \overrightarrow{\frac{\partial W}{\partial r}} + \overrightarrow{\frac{\partial W}{\partial R}}$$

$F_r = \frac{\partial W}{\partial r}$ : étant la force centrifuge et

$F_R = \frac{\partial W}{\partial R}$ : étant une force perpendiculaire à la première et à u.

Dans cette étude nous avons déterminé la valeur de :

$$F_R = m\omega^2 \frac{R}{d^2} (r^2 + 0{,}85)$$

où a rayon de la sphére.

Si a très petit, de l'ordre des dimensions atomiques on trouve :

$$(F_R)_n = \varkappa \frac{h\nu}{d}$$

où $\varkappa$ entier, h constante de Plank, $\nu$ la frequence de rotation.

Cette théorie sert à la conception des filtres de dépoussiérage.