Τέλος μνημονευτέον ὅτι διαρκούσης τῆς ἐπιχειρήσεως ταύτης κατὰ τὸ 1926 κατωρθώθη νὰ ἀνευρεθῇ καὶ διαφυλαχθῇ μέγας ἀριθμὸς πολυτίμων ἀναγλύφων καὶ ἄλλων γλυπτικῶν μελῶν ἐκ τῆς περιφήμου ἐκκλησίας τοῦ Ἰουστινιανοῦ τῆς ἀφιερωμένης εἰς τὸν Θεολόγον (τὸν Εὐαγγελιστὴν Ἰωάννην). Διαρκούσης τῆς βραχείας ἑλληνικῆς κατοχῆς ἤρχισεν ὁ γνωστὸς ἐν Ἀθήναις ἀρχαιολόγος Καθηγητὴς Σωτηρίου νὰ ἀνασκάπτῃ τὴν ἐκκλησίαν ταύτην, τῆς ὁποίας ὁρατὰ ἦσαν μόνον ἐν τῷ λόφῳ Ἁγιασουλοὺκ τεράστια ἐρείπια τῶν ἐκ πλίνθων κατασκευασμένων τρούλλων της. (Ὁ καθηγητὴς DEISSMANN ἀνέφερε ἐνταῦθα τὴν ἐργασίαν ταύτην καὶ τὰς δημοσιεύσεις τοῦ Ἕλληνος ἀρχαιολόγου μὲ ἐπαινετικωτάτους καὶ συμπαθεστάτους λόγους καὶ ἐχαρακτήρισεν αὐτὴν ὡς μέγα κατόρθωμα τοῦ ἑλληνικοῦ ἐκπολιτιστικοῦ πνεύματος[1]). Ὁ Καθηγητὴς Σωτηρίου μετὰ τὴν φοβερὰν καταστροφὴν τοῦ 1922 ἠναγκάσθη νὰ ἐγκαταλίπῃ ἀτελῆ τὴν ἐργασίαν ταύτην ὡς πρὸς τὸ πλεῖστον αὐτῆς μέρος. Πλῆθος μικρῶν κειμηλίων ἐστέγασε τότε ἐντὸς παλαιοῦ Τζαμίου. Τὸ Τζαμίον τοῦτο μετὰ τὸν πόλεμον ἐχρησίμευσεν ὡς κατοικία προσφύγων καὶ ἤλλαξε πολλάκις τοὺς ἐν αὐτῷ ἐνοίκους. Τότε δὲ ἐξαιρουμένων βαρέων τινῶν ἀρχιτεκτονικῶν μελῶν ἐξηφανίσθησαν τὰ πλεῖστα τῶν ἀναγλύφων τῆς Ἐκκλησίας Ἰωάννου τοῦ Θεολόγου, τὰ ὁποῖα εἶχε διαφυλάξει καὶ ταξινομήσει ὁ Σωτηρίου. Εὐτυχῶς κατώρθωσα, βοηθούμενος ὑπὸ τοῦ AZIZ βέη καὶ τῶν ἐπιτοπίων ἀρχῶν, νὰ ἀνεύρω τὰ πλεῖστα τῶν ἐξαφανισθέντων, ἐντετειχισμένα εἰς τὰ παρὰ τὸ Τζαμίον χαλαρῶς κατὰ τὴν ἀνατολικὴν συνήθειαν κτισθέντα οἰκοδομήματα. Τούτων τοὺς τοίχους κατερρίψαμεν, τοὺς περικλείοντας τὰ ἀρχαῖα ταῦτα, καὶ ἠδυνήθημεν ἔπειτα πολλὰ φορτώματα ἁμαξῶν ἐκ τῶν εὑρημάτων τούτων τῆς ἑλληνικῆς ἀνασκαφῆς νὰ μετκφέρωμεν καὶ προσωρινῶς φυλάξωμεν εἰς ἀποθήκην τῆς αὐστριακῆς οἰκίας, μεταξὺ δὲ τῶν εὑρημάτων τούτων καὶ κειμήλιον μοναδικῆς ἀξίας, τὴν ἐπιγραφὴν τοῦ νάρθηκος τῆς Ἐκκλησίας Ἰωάννου τοῦ Θεολόγου».

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ.—**Sur un cas de l'égalité et de l'inégalité des puissances des ensembles***. *Note de M.* ***Spyridion Sarantopoulos***. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ κ. Γ. Ρεμούνδου.

---

1. M. BOREL dans un livre[2] de la réputée collection, qu'il dirige, écrit: «Étant donnés deux ensembles A et B, nous désignerons par A_1 une partie

[1] Σημείωσις Ι. Καλιτσουνάκη.

* Σ. ΣΑΡΑΝΤΟΠΟΥΛΟΥ. — Περὶ μιᾶς περιπτώσεως τῆς ἰσότητος καὶ τῆς ἀνισότητος τῶν δυνάμεων τῶν συνόλων.

[2] Leçons sur la Théorie des fonctions, 1914, p. 102-103.

aliquote quelconque de A, c'est-à-dire un ensemble comprenant uniquement des éléments de A, mais ne les comprenant pas tous; de même B_1 désignera une partie aliquote quelconque de B. Cela étant, si l'on compare A et B, quatre cas sont logiquement possibles et s'excluent réciproquement:

1° Il existe un A_1 ayant même puissance que B, et il n'existe pas de B_1 ayant même puissance que A.

2° Il n'existe pas de A_1 ayant même puissance que B et il existe un B_1 ayant même puissance que A.

3° Il existe un A_1 ayant même puissance que B et aussi un B_1 ayant même puissance que A.

4° Il n'existe ni un A_1 ayant même puissance que B, ni un B_1 ayant même puissance que A».

«... il est clair que ces deux premiers cas, non seulement sont logiquement possibles, mais sont réellement possibles;... La question qui se pose maintenant est la suivante:

Lorsqu'on est dans l'un de deux dernier cas, peut-on affirmer que les deux ensembles A et B ont même puissance?

Nous allons démontrer qu'il en est ainsi dans le troisième cas[2]; mais dans le quatrième cas, nous ne savons rien. *C'est une qnestion qu'il serait très important de résoudre; car,...* ».

2. C'est sur ce quatrième cas que je m'occupe ci-dessous et je donne une réponse complète sur ce sujet si intéressant.

Mais quand dit-on que deux ensembles ont même puissance? D'après M. G. Cantor qui a introduit la notion de la puissance *deux ensembles sont dits avoir même puissance lorsqu'on peut établir entre leurs éléments une correspondance telle, qu'à tout élément de chacun d'eux corresponde un élément et un seul de l'autre.*

Il est clair qu'on peut comprendre une correspondance partielle, c'est-à-dire on peut établir une correspondance univoque et réciproque entre les éléments d'une partie de l'ensemble A et d'une partie de l'ensemble B. (Bien entendu on suppose que ni A, ni B soit nul). Il suffit, p. ex., de faire correspondre une élément de l'ensemble A à un élément de l'ensemble B. Par

[2] La démonstration de ce cas a été indiqué à M. Borel par M. G. Cantor au Congrès de Zurich (août 1897), mais elle est due à M. Felix Berstein; elle a été donnée pour la première fois dans le séminaire de M. Cantor, à Halle.

suite on peut accepter que, étant donnés deux ensembles A et B, il existe un A_1 et un B_1 ayant même puissance.

Si A_1 contient un nombre fini d'éléments, B_1 doit aussi contenir le même nombre fini d'éléments.

Nous dirons qu'un ensemble A correspond partiellement à un autre ensemble B (ou A a une correspondance partielle dans B) quand A a même puissance avec une partie aliquote de B. Nons désignerons cette relation en écrivant $A \leqslant B$ ou $B \geqslant A$. Le symbole donc $\leqslant$ ne veut pas désigner, que les éléments de A sont aussi des éléments de B, mais tout simplement qu'il existe une correspondance partielle.

3. Cela posé nous remarquons que, étant donnés deux ensembles A et B tels qu'il n'existe ni un A_1 ayant même puissance que B, ni un B_1 ayant même puissance que A (hypothèse principale), quatre cas sont logiquement possibles:

1° $A \leqslant B_1$ et $A_1 \leqslant B$
2° $A \leqslant B_1$ et $A_1 \geqslant B$
3° $A \geqslant B_1$ et $A_1 \geqslant B$
4° $A \geqslant B_1$ et $A_1 \leqslant B$

1er cas.—Dans ce cas on suppose que A correspond partiellement à B_1. Cela signifie que A a la même puissance avec une partie B_2 aliquote de B_1, et par suite de B, chose qui ne peut avoir lieu d'après l'hypothèse principale. *Par conséquent A et B n'existent pas.*

Si l'on fait une légère modification sur l'hypothèse 1° en désignant par A_1 et B_1 des parties des ensembles A et B mais non nécessairement aliquotes, c'est-à-dire qui puissent coincider avec A et B, on peut avoir un résultat positif. En effet, sous cette condition si l'on veut ne pas être en contradiction avec l'hypothèse principale on peut accepter que B_2 coincide avec B. Alors A aura même puissance que B. D'autre part si A n'est pas composé d'un nombre fini d'éléments, on peut faire soustraction d'un ensemble A_2 dénombrable et par suite trouver un autre ensemble A_3 qui aura, comme il est connu, même puissance que A. Mais alors il existerait une partie aliquote A_3 de A ayant même puissanee que B, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse principale. *Donc A et B sont composés d'un même nombre fini d'éléments* et B_1 doit coincider avec B.

Remarque. Dans ce cas on remarque que l'hypothèse $A_1 \leqslant B$ a été faite sans qu'on en ait besoin. En effet dans le cas résolu par la négative, cela va sans dire. Dans l'autre cas l'hypothèse $A_1 \leqslant B$ se remplit par elle-même.

2ème cas.—Ce cas ne diffère pas essentiellement du précédent parce que l'on suppose de nouveau $A \leqslant B_1$; par conséquent ou bien A et B n'existent pas, ou bien ils sont composés d'un même nombre fini d'éléments. Dans ce dernier cas la condition $A_1 \geqslant B$ ne peut avoir lieu que si A_1 coincide avec A. Autrement A et B n'existent pas.

3ème cas.—Ce cas ne diffère de 1er que par l'échange de A et de B. *Donc la même conclusion.*

4ème cas. On remarque tout d'abord que ce cas a lieu quand A et B sont composés d'un même nombre fini d'éléments; on peut avoir en même temps $A \geqslant B_1$ et $A_1 \leqslant B$, A_1 et B_1 désignant des parties aliquotes de A et de B; l'hypothèse principale est aussi remplie. Ce cas n'a pas lieu quand A et B sont composés d'un nombre fini d'éléments, mais non le même.

Mettons ce cas partiel à part; supposons c'est-à-dire que A et B se composent d'une infinité d'élements.

Dans ces conditions on remarque que toute partie aliquote A_2 de A contenant A_1 a une correspondance partielle dans B, car autrement ou bien A_2 a une correspondance complète, c'est-à-dire a même puissance que B, ou bien B a une correspondance partielle dans A_2. Mais si l'on accepte que A_2 correspond complètement à B on est en contradiction avec l'hypothèse principale d'après laquelle il n'existe ni une partie aliquote de A ayant même puissance que B. Si l'on accepte que B correspond partiellement dans A_2, on est devant le 3me cas et par suite ou bien A et B n'existent pas, ou bien ils sont composés d'un même nombre fini d'éléments. C'est le cas que nous avons mis à part. Donc A_2 contenant A_1 correspond partiellement à B. (Si A_2 est une partie de A_1, il aura une correspondance dans B *a fortiori*).

Cela posé, on peut choisir l'ensemble A_2 infini, tel que l'ensemble $A-A_2$ soit dénombrable. Soit B_2 la partie aliquote de B qui a même puissance que A_2. Désignons par A_3 et B_3 les ensembles $A-A_2$ et $B-B_2$. Nous aurons

$$(1) \qquad A=A_2+A_3 \quad \text{et} \quad B=B_2+B_3$$

L'ensemble A_3 est à cause de l'hypothèse faite, dénombrable. Je dis que B_3 doit être aussi dénombrable. Si l'on suppose le contraire, on peut partager[1]

[1] On ne suppose pas que B_3 soit un ensemble fini, car alors B_3 aurait même puissance qu'une partie aliquote de A_3 et par suite, à cause de (1), B aurait même puissance qu'une partie aliquote de A; mais cela est contradictoire à l'hypothèse principale.

B_3 en deux ensembles B_4 et B_5 donc l'un, p. ex. B_4, soit dénombrable[1]. Mais alors puisque A_2 et A_3 ont même puissance que B_2 et B_4 et comme on a

$$A=A_2+A_3 \text{ et } B=B_2+B_4+B_5$$

A aura même puisssance qu'une partie aliquote B_2+B_4 de B, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse principale. Donc B_3 est dénombrable. Il en résulte que A et B ont même puissance.

D'autre part puisque A_3 est dénombrable, A et A_2 ont même puissance et par suite A_2 a même puissance que B. Mais cela est aussi en contradiction avec l'hypothèse principale.

On est arrivé à cette contradiction en supposant que les ensembles A et B sont composés d'une infinité d'eléments.

On en conclut que tels ensembles n'existent pas.

On voit donc que *sous l'hypothèse principale deux ensembles A et B ne peuvent exister qu' à la condition d'être composés d'un même nombre fini d'éléments.*

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Ὁ καθηγητὴς τῶν Παρισίων κ. BOREL ἔν τινι τῶν βιβλίων του ἐπὶ τῆς θεωρίας τῶν συναρτήσεων ἐξετάζει τὴν ἀνισότητα ἢ ἰσότητα τῶν δυνάμεων τῶν συνόλων. Αἱ περιπτώσεις καθ' ἃς δύο σύνολα εἶναι τῆς αὐτῆς ἢ ἀνίσου δυνάμεως δὲν ἔχουσιν εὑρεθῆ πᾶσαι. Ὁ κ. BOREL ἀναφέρει τέσσαρας δυνατὰς περιπτώσεις δηλαδὴ ἐκείνας αἵτινες λογικῶς δύνανται νὰ παρουσιασθῶσιν· ἐπὶ τῶν δύο πρώτων δὲν παρουσιάζεται δυσχέρεια, τῆς τρίτης ἡ λύσις ἀνεκοινώθη εἰς τὸν κ. BOREL ἀπὸ τὸν γερμανὸν μαθηματικὸν κ. CANTOR καὶ ὀφείλεται εἰς τὸν κ. FÉLIX BERSTEIN.

Τὴν τετάρτην περίπτωσιν ἐξετάζει ὁ κ. ΣΑΡΑΝΤΟΠΟΥΛΟΣ, διότι ἡ ἔρευνα αὐτῆς δὲν εἶχεν ἐξαντληθῆ καὶ παρέχει λύσιν τοῦ σχετικοῦ ζητήματος ἐκφραζομένην διὰ τοῦ ἑξῆς θεωρήματος:

«Ἐὰν ὑπάρχουσι δύο σύνολα A καὶ B τοιαῦτα ὥστε οὐδὲν ἀληθὲς μέρος τοῦ A »νὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν δύναμιν ἣν καὶ τὸ B καὶ ἀντιστρόφως, οὐδὲν ἀληθὲς μέρος τοῦ B »νὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν δύναμιν ἣν καὶ τὸ A, τὰ δύο ταῦτα σύνολα θ' ἀποτελῶνται »ἐκ πεπερασμένου καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ στοιχείων».

---

[1] B_4 aurait donc, comme il est connu, même puissance que A_3 et B_5 serait composé d'une infinité d'éléments.