

ΣΥΝΕΔΡΙΑ ΤΗΣ 12ΗΣ ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 1995

ΠΡΟΕΔΡΙΑ ΜΑΝΟΥΣΟΥ ΜΑΝΟΥΣΑΚΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ. — **Ὁ νεολογισμὸς Fractal στὰ Μαθηματικὰ καὶ ἡ ἀπόδοσή του
στὴν ἑλληνικὴ γλῶσσα**, ὑπὸ τοῦ Ἀκαδημαϊκοῦ κ. *Νικολάου Κ. Ἀρτεμιάδη**.

Κύριε Πρόεδρε,
Κύριοι Συνάδελφοι,
Κυρίες καὶ Κύριοι.

Τὰ τελευταῖα δεκαπέντε περίπου χρόνια ἡ ἐπιστῆμη τῶν μαθηματικῶν καὶ γενικότερα οἱ φυσικὲς ἐπιστῆμες διανύουν μιὰ ἐξελικτικὴ πορεία ἡ ὁποία λόγω τῆς ἰσχύος, τῆς δημιουργικότητος καὶ τῆς ἐκτάσεώς της, ἀπετέλεσε καὶ ἀποτελεῖ μιὰ σπουδαιότατη διεπιστημονικὴ πείρα. Πρόκειται γιὰ τὴν «Θεωρία τῶν Fractals» καὶ τὴν «Θεωρία τοῦ Χάους».

Ἡ σπουδαιότητα καὶ ἡ ἐπικαιρότητα ποὺ χαρακτηρίζουν τὶς θεωρίες αὐτὲς μὲ εἶχαν ὀδηγήσει στὴν προσπάθεια νὰ παρουσιάσω τὰ θέματα αὐτά, σὲ ἀπλουστευμένη μορφή, στὸ εὐρύτερο ἐπιστημονικὸ κοινό, μὲ δύο ὁμιλίες μου ἀπὸ τοῦ βήματος αὐτοῦ [1], [2]. Σχετικὴ μὲ τὰ θέματα αὐτά ὑπῆρξε καὶ ἡ ὁμιλία τοῦ καθ. Π. Παναγιωτόπουλου [3].

Στὶς ὁμιλίες αὐτὲς εἶχα ἀφήσει τὸν ὄρο «Fractal» («ἀμετάφραστο») μέχρι ἀνευρέσεως ἢ ἐπινοήσεως δοκίμου ὄρου, ὁ ὁποῖος θὰ ἀπέδιδε τὸν ὡς ἄνω, ὑψίστης σπουδαιότητος, νεολογισμὸ στὴν ἑλληνικὴ γλῶσσα.

Ὁ σκοπὸς τῆς σημερινῆς ἀνακινώσεως εἶναι νὰ περιγράψω καὶ νὰ ὀνομάσω δύο ὄρους οἱ ὁποῖοι κατὰ τὴν γνώμη μου ἀποδίδουν μὲ ἀρκετὴ σαφήνεια τὴν ἔννοια

* NIKOLAOS K. ARTEMIADIS, *The neologism Fractal in Mathematics and its translate in greek language.*

fractal στην ελληνική, εν συνεχεία δε να προβῶ στην επιλογή τοῦ καταλληλοτέρου ἐξ αὐτῶν.

Ἐπάρχει ἡ ἐξῆς ρῆσις στὴν λατινική: *nomen est numen* (ὀνομάζειν ἐστὶ γνωρίζειν) [5] ἡ ὁποία μᾶς προτρέπει, προτοῦ νὰ ὀνομάσουμε τοὺς ἐν λόγω ὄρους νὰ τοὺς γνωρίσουμε.

Ἡ Θεωρία τῶν Fractals εἶναι μιὰ νέα γεωμετρία τῆς φύσης, ἡ ὁποία περιγράφει πολλές ἀπὸ τὶς ἀνώμαλες-ἀκανόνιστες σύνθετες δομὲς καὶ σχήματα ποὺ μᾶς περιβάλλουν ὅπως λ.χ. εἶναι ἓνα σύννεφο, ἓνα βουνό, οἱ ἀκτὲς μιᾶς χώρας, ἡ τροχιά μιᾶς ἀστραπῆς, οἱ καμπύλες τοῦ Brown κ.ἄ., μορφὲς τὶς ὁποῖες ἡ Εὐκλείδειος Γεωμετρία παρακάμπτει ὡς ἀμόρφες). Τὰ σχήματα αὐτὰ ὁ Benoit B. Mandelbrot, ὁ θεμελιωτὴς τῆς θεωρίας τῶν Fractals ὀνόμασε Fractals.

Ἡ λέξη Fractal προέρχεται ἀπὸ τὸ λατινικὸ ἐπίθετο *fractus*, τὸ δὲ ἀντίστοιχο λατινικὸ ρῆμα εἶναι *frangere* ποὺ σημαίνει θραύω καὶ δηλώνει ἐνέργεια ἀπὸ τὴν ὁποία προκύπτουν τεμάχια σὲ ἀνώμαλα σχήματα.

Ὡς γνωστὸν ἡ λέξη «ἀλγεβρα» (*algebra*) παράγεται ἀπὸ τὴν ἀραβικὴ λέξη «*jabara*» ποὺ σημαίνει «δένω μαζὶν» (συναρμολογῶ). Συνεπῶς οἱ ἔννοιες *fractal* καὶ *algebra* εἶναι ἐτυμολογικῶς ἀντίθετες.

Συνήθως ἡ μὲ προσοχὴ ἐπινόηση ἑνὸς νεολογισμοῦ εἶναι (ἂν αὐτὴ εἶναι ἐφικτὴ) προτιμότερη ἀπὸ τὴν ἐξεύρεση ἑνὸς ὄρου, μεταξὺ τῶν ἤδη ὑπαρχόντων, καὶ τὴν προσθήκη εἰς αὐτὸν μιᾶς ἐπιπλέον ἐννοίας.

Ὁ Mandelbrot ἐπιλέγοντας τὸν ὄρο Fractal ἐπιτυχᾶνει ὄντως νὰ ἐπινοήσῃ ἓνα νεολογισμὸν κατάλληλο γιὰ τὸν σκοπὸ ποὺ ἐπιδιώκει.

Ὅταν ὅμως ἡ ἐπιτυχὴς ἐπινόηση ἑνὸς νεολογισμοῦ δὲν εἶναι ἐφικτὴ, τότε ἡ ἐπιλογή τῆς κατάλληλης λέξης πρέπει ἐπίσης νὰ γίνῃ μὲ μεγάλη προσοχὴ μεταξὺ τῶν ὄρων ποὺ ἔχομε στὴ διάθεσή μας καὶ τῶν ὀλιγότερο ἐν χρήσει. Πρὸς τοῦτο πρέπει κατ' ἀρχὴν νὰ ληφθεῖ ὑπόψη ὅτι ἡ κοινὴ καὶ εὐρείας χρήσεως χρησιμοποιουμένη σημασία μιᾶς λέξης εἶναι συχνὰ τόσο καλὰ «ἰσχυρωμένη» ὥστε δὲν μπορεῖ αὐτὴ νὰ ἀπαλειφθεῖ ἢ νὰ μεταβληθεῖ ὅσο καὶ ἂν προσπαθήσουμε νὰ τὴν ὀρίσουμε ἐκ νέου. Συνηγοροῦσα μὲ τὴν ἄποψη αὐτὴ εἶναι ἡ ἀκόλουθη παρατήρηση τὴν ὁποίαν εἶχε κάνει ὁ Voltaire τὸ 1730 ἀναφερόμενος στὴν περιφρημὴ Θεωρία τῆς Βαρύτητας τοῦ Newton:

«Ἄν ὁ Newton δὲν εἶχε χρησιμοποιήσῃ τὴν λέξη «*attraction*», ὁ κάθε ἀκαδημαϊκὸς (ἐννοεῖ τὰ μέλη τῆς Γαλλικῆς Ἀκαδημίας) θὰ ἄνοιγε τὰ μάτια πρὸς τὸ «φῶς». Δυστυχῶς ὁ Newton χρησιμοποίησε, στὸ Λονδίνο, μιὰ λέξη τὴν ὁποίαν οἱ Παρισίνοι εἶχαν ἤδη συνδέσει, εἶχαν προσδώσει σ' αὐτὴ τὴν ἰδέα τοῦ γελοίου ἢ τοῦ κωμικοῦ».

Στήν περίπτωση αποδόσεως τοῦ ὄρου Fractal στήν ἑλληνική θά ἀνατρέξομε στό πλούσιο λεξιλόγιο πού διαθέτει ἡ γλώσσα μας ἀπό ὅπου θά ἐπιλέξομε τίς λέξεις: **Θραῦσμα - Τρίμμα - Θρύμμα**. Παραθέτω τίς σημασίες αὐτῶν τῶν λέξεων [4].

Θραῦσμα : σύντριμμα, κομμάτι.

Τρίμμα : πᾶν τὸ ὑποστάν τριβήν, θρύψαλον.

Θρύμμα : σύντριμμα, θρύψαλον.

Ἀπέκλεισα τὴ λέξη **Θραῦσμα** γιὰ τοὺς λόγους πού ἀνέφερα παραπάνω, ἦτοι, διότι ἡ χρήση τῆς λέξεως αὐτῆς εἶναι πολὺ ἐκτεταμένη καὶ ἡ σημασία της εἶναι ὄντως καλὰ «κατοχυρωμένη».

Ἀπέκλεισα ἐπίσης τὴν λέξη «τρίμμα» (τῆς ὁποίας ἡ πρώτη σημασία ἀνταποκρίνεται ἀσθενέστερα πρὸς τὴν ἔννοια fractal ἀπὸ ἐκείνην τῆς λέξεως «θρύμμα») κυρίως διότι εἶναι ὁμόηχος μὲ τὴν λέξη «τρήμα» (trema) (ὀπή, τρύπα) τῆς ὁποίας γίνεται εὐρεῖα χρῆσις στό σύγγραμμα τοῦ Mandelbrot ([5], Κεφ. X), ἡ δὲ σημασία πού ἀποδίδεται σ' αὐτὴν διαφέρει ἀπὸ ἐκείνην τῆς λέξεως fractal. Ὡς ἐκ τούτου ἡ ἀπόδοση τοῦ ὄρου Fractal στήν ἑλληνική μὲ τὴν λέξη «τρίμμα» θά δημιουργοῦσε, ἐνδεχομένως, σύγχυση στὸν Ἑλληνα ἀναγνώστη.

Τέλος καταλήγω στὴν ἐπιλογή τοῦ ὄρου **Θρύμμα** ὡς τοῦ καταλληλοτέρου νὰ ἀποδώσει τὸν ὄρο Fractal στήν ἑλληνική. Ἡ λέξη «θρύμμα» εἶναι βραχεῖα, ἡ χρήση της εἶναι περιορισμένη καὶ συνδυάζει τίς δύο ἐπιθυμητὲς ἔννοιες, τοῦ «θραυσμένου» δηλαδὴ τοῦ «μὴ ἀκεραίου» καθὼς καὶ τοῦ ἀνωμάλου σχήματος. Ὁ ὄρος ΘΡΥΜΜΑ ἔχει προταθεῖ καὶ ἀπὸ τὸν καθ. Π. Παναγιωτόπουλο [3].

Γιὰ νὰ προχωρήσουμε στὴ δεύτερη ὑποψήφια ὀνομασία γιὰ τὸ νεολογισμὸ Fractal στήν ἑλληνική ἀπαιτεῖται κάποιον προκαταρκτικὸ ὕλικὸ ἀναφερόμενο στὴν ἔννοια τῆς «διαστάσεως» ἐνὸς συνόλου.

Ἡ ἔννοια τῆς διαστάσεως ἔχει ἐν γένει πολλὰς μαθηματικὰς ὀψεις, οἱ ὁποῖες ὀδηγοῦν ἀντιστοίχως σὲ διάφορες ἀριθμητικὰς τιμές. Στὴν περίπτωσή μας θά ἐπικεντρώσουμε τὸ ἐνδιαφέρον μας σὲ δύο μόνο ὀρισμοὺς τῆς ἐννοίας «διάστασις». Ἐπὶ τῇ βάσει κάθε ἐνὸς ἐκ τῶν ὀρισμῶν αὐτῶν, ἀντιστοιχεῖ σὲ τυχὸν σύνολο τοῦ Εὐκλείδειου χώρου R^n (ὅσοδήποτε «παθολογικὸ» καὶ ἂν εἶναι τὸ σύνολο αὐτὸ) ἓνας πραγματικὸς ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος καλεῖται «διάστασις» τοῦ ἐν λόγω συνόλου.

Ὁ ἓνας ἐκ τῶν ὀρισμῶν αὐτῶν, ὁ ἀνταποκρινόμενος περισσότερο στὴ διαίαισθησή μας, εἶναι κατὰ τοὺς Brouwer, Lebesgue, Menger καὶ Grysohn, ὁ ἀναφερόμενος στὴν «τοπολογικὴ διάστασις» τοῦ θεωρουμένου συνόλου, ἡ ὁποία συμβολίζεται μὲ D_T .

Ἡ διατύπωση τοῦ ἐτέρου ὀρισμοῦ ὀφείλεται στὸν Hausdorff τὸ 1919, ἐτέθη δὲ αὐτὴ στὴν τελικὴ μορφή της ἀπὸ τὸν Besicovitch καὶ συμβολίζεται μὲ D .

Ὅταν ἐργαζόμαστε (ὡς συνήθως συμβαίνει) στὸν Εὐκλείδειο χῶρο R^n , οἱ δύο ἀριθμοὶ D_T καὶ D εἶναι μεγαλύτεροι ἢ ἴσοι τοῦ μηδενὸς καὶ μικρότεροι ἢ ἴσοι τοῦ n . Ὅμως ἐνῶ ἡ D_T εἶναι πάντοτε ἀκέραιος ἀριθμὸς, ἡ D δὲν εἶναι κατ' ἀνάγκην ἀκέραιος, οἱ ἀριθμοὶ, D_T καὶ D , κατ' ἀνάγκην δὲν συμπίπτουν, ἰσχύει δὲ μεταξὺ αὐτῶν ἡ σχέση $D \geq D_T$. Γιὰ ὅλα τὰ σχήματα μὲ τὰ ὁποῖα ἀσχολεῖται ἡ Εὐκλείδειος Γεωμετρία ἀληθεύει ἡ σχέση $D = D_T$. Ὅμως ὑπάρχουν σύνολα γιὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει ἡ σχέση $D > D_T$. Ἡ τελευταία αὐτὴ παρατήρηση ὀδηγεῖ στὸν ἀκόλουθο μαθηματικὸ ὀρισμὸ τῆς ἐννοίας Fractal.

Ὁ ρ ι σ μ ὸ ς : Καλοῦμε Fractal κάθε σύνολο γιὰ τὸ ὁποῖο ἰσχύει ἡ σχέση $D > D_T$.

Π α ρ α τ η ρ ῆ σ ε ι ς

(α) Κάθε σύνολο γιὰ τὸ ὁποῖο τὸ D δὲν εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς εἶναι προφανῶς ἓνα fractal.

(β) Ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ κλασσικὸ σύνολο τοῦ Cantor εἶναι ἓνα fractal διότι ἔχομε:

$$D = \log^2 / \log^3 \simeq 0.6309, \quad D_T = 0$$

Στὸν R^n τὸ σύνολο τοῦ Cantor, γενικευμένο, ὀρίζεται ἔτσι ὥστε $D_T = 0$ ἐνῶ τὸ D μπορεῖ νὰ λάβει ὁποιαδήποτε τιμὴ μεταξὺ τοῦ 0 καὶ τοῦ n (συμπεριλαμβανομένου).

(γ) Ἡ «Νησίδα τοῦ Koch» τῆς ὁποίας πλήρης περιγραφή δόθηκε στὴν δεύτερη ἀπὸ τίς δύο προαναφερθεῖσες ὁμιλίες μου, εἶναι καὶ αὐτὴ ἓνα Fractal, διότι ἀποδεικνύεται ὅτι γιὰ τὸ σύνολο αὐτὸ ἔχομε:

$$D = \log^4 / \log^3 \simeq 1.2618 > 1, \quad D_T = 1$$

(δ) Πρέπει νὰ τονισθεῖ ὅτι ὑπάρχουν fractals γιὰ τὰ ὁποῖα ἡ D εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς. Παράδειγμα ἐνὸς τέτοιου Fractal εἶναι ἡ καμπύλη τῆς κινήσεως τοῦ Brown γιὰ τὴν ὁποία ἔχομε:

$$D = 2, \quad D_T = 1$$

Τὸ γεγονός ὅτι ὁ ἀριθμὸς D δὲν εἶναι κατ' ἀνάγκην ἀκέραιος, ἀπαιτεῖ κάποιον ἰδιαίτερο σχόλιο. Ἄν τὸ ἐπίθετο «κλασματικὸς» χρησιμοποιεῖθῃ (καταχρηστικῶς)

ώς συνώνυμο με τὴ φράση «μὴ ἀκέραιος», τότε πολλὲς ἀπὸ τὶς τιμὲς ποὺ λαμβάνει τὸ D εἶναι κλασματικές, ἢ δὲ διάσταση D καλεῖται συχνά, γιὰ τὸ λόγο αὐτό, «κλασματική διάσταση».

Ἐχοντας ὑπόψη τὸ παραπάνω σχόλιο, προτείνω ὡς δεύτερη ἀπόδοση τοῦ ὅρου fractal στὴν ἑλληνικὴ τὸν ὄρο «κλασματοδιάστατο» (ἢ κλασμοδιάστατο) (σύνολο):

Ἐνδιαφέρουσα ἐπίσης εἶναι ἡ ἀπόψη τοῦ καθηγητοῦ τῶν μαθηματικῶν κ. Χ. Γκλαβᾶ, ὁ ὁποῖος, ἀφοῦ ἐμελέτησε τὰ κείμενα τῶν δύο προαναφερθεισῶν ὁμιλιῶν μου, μοῦ ἐπρότεινε τὸν ὄρο «μεσοδιάστατο», ἔχοντας προφανῶς ὑπόψη ὅτι ἡ διάσταση D , στὴν περίπτωση ἐνὸς Fractal, εὐρίσκεται μεταξὺ τοῦ D_T καὶ τοῦ n ($D_T < D \leq n$).

Τὰ πλεονεκτήματα τῶν ὄρων «κλασματοδιάστατο» ἢ «κλασμοδιάστατο» ἢ «μεσοδιάστατο» εἶναι ὅτι αὐτοὶ ἐμπεριέχουν σχεδὸν τὸν ὀρισμὸ τοῦ Fractal καὶ ἐπιπλέον μποροῦν νὰ θεωρηθοῦν ὡς ἐπινοήσεις καὶ ὄχι ὡς ἐπιλογή ἐξ ὑπαρχόντων ὄρων. Εἶναι ὅμως οἱ ὄροι αὐτοὶ πολυσύλλαβοι καὶ μᾶλλον ἄκομψοι.

Ἀντιθέτως, ὁ ὄρος **Θρύμμα** δὲν ἀποτελεῖ βέβαια ἐπινοήση, εἶναι ὅμως βραχύς, δὲν εἶναι πολὺ ἐν χρήσει καὶ κυρίως ἀποδίδει, ὅπως ἀνέφερα καὶ προηγουμένως, τὶς ἐπιθυμητὲς ιδιότητες τοῦ Fractal.

Ἐν κατακλείδι, προτείνω, γιὰ τοὺς παραπάνω ἐκτεθέντας λόγους, ὅπως ὁ νεολογισμὸς Fractal ἀποδοθεῖ στὴν ἑλληνικὴν μὲ τὴν λέξη **Θρύμμα**.

Τέλος, ἄς σημειωθεῖ, ὅτι ἂν ὁ Mandelbrot εἶχε, ἀντὶ τοῦ ὄρου Fractal ἐπιλέξει τὸν ὄρο **Θρύμμα**, ἢ ἐπιλογή αὐτὴ δὲν θὰ ἦταν, κατὰ τὴ γνώμη μου, ὀλιγότερο ἐπιτυχής, ἂν μάλιστα λάβομε ὑπόψη τὸν πολὺ μεγάλο ἀριθμὸ λέξεων ποὺ ἔχει δαυεῖσθεῖ ἢ θεωρία τῶν Fractals ἀπὸ τὴν Ἑλληνικὴ Γλῶσσα.

S U M M A R Y

The purpose of the author is to find or invent a term corresponding to the neologism Fractal, invented by B. Mandelbrot [5] and used in the english literature.

To this end a concise description of the notion of Fractal and a few examples are given.

Then the author picks up the greek words :

Θραῦσμα - Τρίμμα - Θρύμμα

and explains why the most appropriate candidate to replace Fractal in Greek is **Θρύμμα**. He also expresses the opinion that the choice by Mandelbrot of the term **Θρύμμα**, instead of Fractal, would not be less successful.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Ν. Κ. Ἀρτεμιάδης, "Ἡ Γεωμετρία τῶν Fractals", Πρακτ. Ἀκαδ. Ἀθηνῶν 63 (1988).
2. Ν. Κ. Ἀρτεμιάδης, "Χάος - Fractals - Δυναμικά Συστήματα", Πρακτ. Ἀκαδ. Ἀθηνῶν 69 (1994).
3. Π. Παναγιωτόπουλος, "Ἡ Μηχανική τῶν Fractals", Πρακτ. Ἀκαδ. Ἀθηνῶν 65 (1990).
4. Δ. Β. Δημητράκος, "Νέον Ὀρθογραφικὸν Ἑρμηνευτικὸν Λεξικόν", 1959.
5. B. B. Mandelbrot, "The Fractal Geometry of Nature", W. H. Freeman and Company, New York, 1982.