τῶν 26 ὀργυιῶν βάθους, ἔρευνα εἶναι ἀδύνατος, ἅτε ἐξαιρετικῶς κινδυνώδης διὰ τοὺς δύτας. Ἄλλως τε, νομίζω, οἱ ἓξ ἀνευρεθέντες ὀγκόλιθοι ἀρκοῦν πρὸς ἀνενδοίαστον ἐξακρίβωσιν τοῦ προμνησθέντος τοῦ ΗΡΟΔΟΤΟΥ χωρίου, ὅπερ διὰ τὴν συντομίαν του καὶ τὴν ἔλλειψιν εἰδικοῦ ἐνδιαφέροντος, δὲν ἐφελκύει ἀπὸ πρώτης ὄψεως τοῦ μελετητοῦ τὴν προσοχήν.

Εἰς τὸν βυθὸν εὑρέθη ἐπίσης ἄγκυρα δύο τόννων, συστήματος «Τρότμαν» ὄντος μεγάλης χρήσεως κατὰ τὴν μεταξὺ 1875-1890 περίοδον. Προφανῶς, ἡ ἄγκυρα ἀνῆκεν εἰς μέγα ατμόπλοιον, ὅπερ πλέον κατ' ἐπάνω τῆς ὑφάλου ὁλοταχῶς, τὴν διέκρινεν μόνον ὅτε τὴν εἶχεν ἐπικινδύνως πλησιάσει καί, ἵνα μετριάσῃ τὴν κατὰ τὴν ἀναπόφευκτον ἐπ' αὐτῆς προσάραξίν του ρύμην, ἐπόντισεν ἄγκυραν. Ἡ ἐνταθεῖσα δὲ τῆς ἀγκύρας ἅλυσις, ἥτις καὶ ἀπεκόπη ἐν τέλει, εἶχε σαρώσει ἐν τῷ μεταξὺ τοὺς πρὸς τὸ κρημνῶδες χεῖλος τοῦ πρανοῦς ὀγκολίθους, οὓς ἐκυλίνδησε πρὸς τὸν βαθὺν βυθόν.

Περαίνων, ἐκφράζω τὴν εὐγνωμοσύνην μου εἰς τὸν κ. ΤΡΑΤΩΛΟΝ καὶ τὸ πλήρωμα τοῦ «Πηνειοῦ» καθὼς καὶ εἰς τὸν κ. ΚΑΛΛΑΡΗΝ, διὰ τοὺς ἐκτάκτους κόπους οὓς κατέβαλον εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην.

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ ΜΗ ΜΕΛΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ.— **Sur un théorème de C. Stéphanos***, *Note de M.* ***Th. Varopoulos***. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Κ. Μαλτέζου.

1. C. STÉPHANOS dans son Mémoire paru au *Bulletin de la Société Mathématique de France* «Sur une propriété remarquable des nombres incommensurables»[1] considère un système de numération complexe admettant pour unités sucessives

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{1.2},\ \frac{1}{1.2.3},\ \ldots,\ \frac{1}{1.2\ldots n},\ \ldots$$

et il trouve la condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre N soit commensurable ou non.

M. P. APPELL dans son Mémoire Sur un «Système de Numération» publié au *Bulletin de la Société Mathématique de France*[2] reprend la question en étudiant les systèmes de numération dans lesquels la base varie; il établit

* Θ. ΒΑΡΟΠΟΥΛΟΥ.—Περὶ ἑνὸς θεωρήματος τοῦ Κυπαρίσσου Στεφάνου.

[1] t. VII, 1878-1879, p. 81-83.

[2] t. LV, 1928, fascicules III-IV, p. 139-141.

entre autres une proposition qui a comme cas particulier le théorème fondamental de C. STÉPHANOS.

2. Je me propose de donner une démonstration extrêmement simple de la proposition de C. STÉPHANOS à savoir:

Une expression

$$a_0 + \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1.2} + \ldots + \frac{a_n}{n!} + \ldots$$

où $a_i < i$, *représente un nombre commensurable ou non suivant que les* a_i *sont, à partir d'un certain rang R, égaux toujours à* $i-1$ *ou ne le sont pas*

Soit

$$a_0 + \frac{a_1}{2!} + \frac{a_2}{1.2.3} + \ldots + \frac{a_n}{(n+1)!} = N = a_0 + b_1$$

avec $a_i < i$ $\quad i > 0$

on a

$$b_1 = \frac{a_1}{1.2} + \frac{a_2}{1.2.3} + \ldots + \frac{a_n}{1.2\ldots(n+1)} \leq \frac{1}{1.2} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{n}{(n+1)!}$$

comme

$$\frac{1}{1.2} = 1 - \frac{1}{1.2}$$

$$\frac{1}{1.2.3} = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3}$$

$$\frac{1}{1.2.3.4} = \frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{1.2.3.4}$$

$$\ldots$$

$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

donc

$$b_1 = 1 - \frac{1}{(n+1)!} < 1$$

et alors

$$a_0 \leq N < a_0 + 1$$

par suite a_0 est la partie entière de N et b_1 la partie fractionnaire; de même

$$a_1 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{3.4} + \ldots + \frac{a_n}{3.4\ldots(n+1)} = 2b_1$$

$$2b_1 = a_1 + b_2$$

avec

$$b_2 = \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{3.4} + \ldots + \frac{a_n}{3.4\ldots(n+1)} < 1 - \frac{1.2}{(n+1)!} < 1$$

donc

$$a_1 \leq 2b_1 + 1$$

et alors a_1 est la partie entière de $2b_1$; etc.

Les nombres a_0, a_1 a_2,... a_n sont définis d'une manière unique, donc la représentation de N est unique.

Voyons maintenant la réciproque

La fraction N étant donnée, on prend

$$a_0 = E(N)$$

$$a_1 = E\left[2(N - a_0)\right] = E(2b_1)$$

$$a_2 = E\left[3\left\{2(N - a_0) - a_1\right\}\right] = E(3b_2)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

E(x)=partie entière de x

et l'on arrive, après un nombre fini d'opérations, à un b_{n+1} nul, car pour n assez grand le produit $n! \times N$ est entier.

On verrait de même que tout nombre *fractionnaire ou non* peut être représenté par la suite

$$a_0 + \frac{a_1}{1.2} + \frac{a_2}{1.2.3} + \ldots + \frac{a_n}{1.2.3\ldots(n+1)}$$

avec $a_i \leqq i$ pour $i > o$.

Donnons un exemple:

Nous allons considérer le nombre N=3,1416 et faire voir qu'en effet on pourrait le mettre sous la forme de la série de Stéphanos.

Suivant la réciproque de la démonstration que nous venons de donner, nous allons calculer d'abord les b_i puis le nombre a_i qui vérifient l'inégalité $a_i \leqq i$

En effet nous avons

$$N = 3,1416$$

		$a_0 = 3$
$b_1 = 0,1416$	$2b_1 = 0,2832$	$a_1 = 0$
$b_2 = 0,2832$	$3b_2 = 0,8496$	$a_2 = 0$
$b_3 = 0,8496$	$4b_3 = 3,3984$	$a_3 = 3$
$b_4 = 0,3984$	$5b_4 = 1,9920$	$a_4 = 1$
$b_5 = 0,9920$	$6b_5 = 5,9520$	$a_5 = 5$
$b_6 = 0,9520$	$7b_6 = 6,6640$	$a_6 = 6$
$b_7 = 0,6640$	$8b_7 = 6,3120$	$a_7 = 6$
$b_8 = 0,3120$	$9b_8 = 2,808$	$a_8 = 2$
$b_9 = 0,808$	$10b_9 = 8,08$	$a_9 = 8$
$b_{10} = 0,08$	$11b_{10} = 0,88$	$a_{10} = 0$
$b_{11} = 0,88$	$12b_{11} = 10,56$	$a_{11} = 10$

$b_{12}=0,56$	$13b_{12}=7,28$	$a_{12}=7$
$b_{13}=0,28$	$14b_{13}=3,92$	$a_{13}=3$
$b_{14}=0,92$	$15b_{14}=13,8$	$a_{14}=13$
$b_{15}=0,8$	$16b_{15}=12,8$	$a_{15}=12$
$b_{16}=0,8$	$17b_{16}=13,6$	$a_{16}=13$
$b_{17}=0,6$	$18b_{17}=10,8$	$a_{17}=10$
$b_{18}=0,8$	$19b_{18}=15,2$	$a_{18}=15$
$b_{19}=0,2$	$20b_{19}=4$	$a_{19}=4$

Donc nous pouvons écrire :

$$3,1416=3+\frac{3}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{5}{6!}+\frac{6}{7!}+\frac{6}{8!}+\frac{2}{9!}+\frac{8}{10!}+\frac{10}{12!}+\frac{7}{13!}+\frac{3}{14!}$$
$$+\frac{13}{15!}+\frac{12}{16!}+\frac{13}{17!}+\frac{10}{18!}+\frac{15}{19!}+\frac{4}{20!}.$$

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Ἐν ἔτει 1878 ὁ ΚΥΠΑΡΙΣΣΟΣ ΣΤΕΦΑΝΟΣ εἰς τὸ ὑπόμνημά του «Sur une propriété remarquable des nombres incommensurables» ἔδωκε τὴν ἱκανὴν καὶ ἀναγκαίαν συνθήκην ἵνα ἀριθμός τις εἶναι σύμμετρος ἢ μή.

Ἀνάλογον θεωρίαν, ὀφειλομένην εἰς τὸν κ. BOREL, ἔχομεν προχειμένου νὰ γνωρίσωμεν ἂν ἀριθμός τις εἶναι ἀλγεβρικὸς βαθμοῦ n ἢ μή.

Πρὸ μηνῶν ὁ κ. P. APPELL, ἔχων ὑπ' ὄψει του τὰ ἐξαγόμενα τοῦ ΚΥΠΑΡΙΣΣΟΥ ΣΤΕΦΑΝΟΥ, ἐδημοσίευσε εἰς τὸ *Δελτίον τῆς Γαλλικῆς Μαθηματικῆς Ἑταιρείας* (τόμος 3-4, σελὶς 139-141, Μάϊος 1928) ὑπόμνημα, εἰς ὃ εὑρίσκονται ἐξαγόμενα περισσότερον γενικά, τὸ γνώρισμα δὲ τοῦ Κ. ΣΤΕΦΑΝΟΥ παρουσιάζεται ὡς μερικὴ περίπτωσις μιᾶς ἰδιότητος τοῦ APPELL.

Ἐπειδὴ τὸ θεώρημα τοῦ ΣΤΕΦΑΝΟΥ ἀναφέρεται σχεδὸν πανταχοῦ (βλέπε Ἀριθμητικὴν τοῦ Tannery), ἐπεχείρησα νὰ ἐπιτύχω μίαν ἀπόδειξιν αὐτοῦ ἐντελῶς ἁπλῆν παρουσιάζουσαν χαρακτῆρα ἐντελῶς στοιχειώδη. Ἡ ἀπόδειξις αὕτη ἀποτελεῖ τὸ θέμα τῆς παρούσης ἀνακοινώσεως.

Κατὰ ταῦτα *ὅταν μᾶς δοθῇ ἀριθμός τις σύμμετρος, δυνάμεθα πάντοτε νὰ θέσωμεν αὐτὸν ὑπὸ μορφὴν ἀθροίσματος κλασμάτων, ὧν οἱ παρονομασταὶ εἶναι* 1.2, 1.2.3, 1.2.3.4, . . ., 1.2.3...ν *οἱ δὲ ἀριθμηταὶ ἀντιστοίχως μικρότεροι τῶν*

2, 3, 4, . . ., ν.
