ΣΥΝΕΔΡΙΑ ΤΗΣ 18ΗΣ ΜΑΪΟΥ 2000

ΠΡΟΕΔΡΙΑ ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΑΡΤΕΜΙΑΔΟΥ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ. – **Ἐπὶ ἑνὸς θεωρήματος τῶν E. Rembs καὶ W. Süss**, ὑπὸ τοῦ ἀντεπιστέλλοντος μέλους κ. Ν. Κ. Στεφανίδη*.

Οἱ Ediard Rembs καὶ Wilhelm Süss βρῆκαν, ὁ ἕνας ἀνεξάρτητα ἀπὸ τὸν ἄλλον, τὸ ἑξῆς ἐνδιαφέρον ΘΕΩΡΗΜΑ[1]. Δίνονται οἱ ἐπιφάνειες

$$F : \vec{x} = \vec{x}(u, v), \quad F^* : \vec{x}^* = \vec{x}^*(u, v)$$

ὁρισμένες στὸν ἴδιο ἁπλῶς συναφὴ τόπο D τοῦ (u, v)-ἐπιπέδου. Ὑποθέτουμε: α) Οἱ ἐπιφάνειες εἶναι τῆς κλάσεως διαφορισιμότητας C^3. β) Οἱ κάθετοι τῶν ἐπιφανειῶν σὲ ἀντίστοιχα σημεῖα τους εἶναι παράλληλοι. γ) Ἰσχύει

$$R_1(u, v) + R_2(u, v) = R_1^*(u, v) + R_2^*(u, v) \;\forall\, (u, v) \in D,$$

ὅπου R_i καὶ R_i^*, $i = 1,2$, εἶναι οἱ πρωτεύουσες ἀκτίνες καμπυλότητας τῶν F καὶ F* ἀντιστοίχως. Τότε: Ἡ ἐπιφάνεια

$$\vec{y} : \vec{x}(u, v) - \vec{x}^*(u, v) \quad (u, v) \in D$$

εἶναι ἐλαχιστική.

Στὴ Διαφορικὴ Γεωμετρία τῶν ἐπιφανειῶν ὑπάρχει μία σειρὰ κλασικῶν τύπων, στοὺς ὁποίους περιέχονται παραστάσεις τῆς τρίτης θεμελιώδους μορφῆς, δηλαδὴ τῆς μετρικῆς τῆς σφαιρικῆς εἰκόνος τῆς ἐπιφάνειας. Μὲ χρήση τῶν τύπων αὐτῶν δίνουμε στὰ ἑπόμενα μία ἁπλὴ καὶ σύντομη ἀπόδειξη τοῦ ἀναφερθέντος θεωρήματος τῶν Rembs καὶ Süss.

---

* N.K. STEPHANIDIS, **Über einen Satz von E. Rembs und W. Süss**.

1. Rembs, E.: Flächen mit gleichen Summen der Hauptkrümmungsradien. Arch. Math. Bd. 8, 469-471. Süss, W.: Eindeutige Bestimmung von Eihyperflächen durch die Summe ihrer Hauptkrümmungsradien. Arch. AMath. Bd. 8, 352-354.

1. Ἔστω $\{\vec{\varepsilon}_1(u, v), \vec{\varepsilon}_2(u, v), \vec{\varepsilon}_3(u, v)\}$ ἕνα ὀρθομοναδιαῖο (ὀρθοκανονικὸ) καὶ θετικὰ προσανατολισμένο συνοδεῦον τρίακμο τῆς ἐπιφάνειας F. Ὑπάρχουν διαφορικὲς μορφὲς πρώτου βαθμοῦ (μορφὲς τοῦ Pfaff) $\alpha_1, \alpha_2, \omega_{ij}$ $i, j = 1, 2, 3$, γιὰ τὶς ὁποῖες ἰσχύει

$$d\vec{x} = \alpha_1\vec{\varepsilon}_1 + \alpha_2\vec{\varepsilon}_2, \quad d\vec{\varepsilon}_1 = \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij}\vec{\varepsilon}_j \quad i = 1,2,3 \; .$$

Στὴ βιβλιογραφία βρίσκονται οἱ θεμελιώδεις ἐξισώσεις τῶν παραγώγων τῆς συναρτήσεως $\vec{x} = (u, v)$ καὶ οἱ συνθῆκες ὁλοκληρωσιμότητος μὲ χρήση τῶν παραγώγων – Pfaff ∇_1, ∇_2 ὡς πρὸς τὶς μορφὲς α_1, α_2. . Ὑπάρχουν πέντε συναρτήσεις $a(u, v)$, $b(u,v)$, $c(u, v)$, $Q(u, v)$, $\overline{Q}(u, v)$, οἱ ὁποῖες ἱκανοποιοῦν τὶς σχέσεις

$$\alpha_1 = \alpha\omega_{31} + b\omega_{32}, \quad \alpha_2 = b\omega_{31} + c\omega_{32} ,$$

$$d\omega_{31} = Q\omega_{31} \wedge \omega_{32}, \quad d\omega_{32} = \overline{Q}\omega_{32} \wedge \omega_{31},$$

ὅπου $\wedge$ συμβολίζει τὸν ἐξωτερικὸ πολλαπλασιασμὸ τῶν διαφορικῶν μορφῶν. Συμβολίζουμε μὲ ∂_1, ∂_2 τὶς παραγώγους ὡς πρὸς τὶς μορφὲς ω_{31}, ω_{32}. Οἱ παράγωγοι καὶ $i=1,2$ συνδέονται μὲ τὶς σχέσεις

$$\partial_1 = a\nabla_1 + b\nabla_2, \quad \partial_2 = b\nabla_1 + c\nabla_2.$$

Προκύπτουν οἱ ἑξῆς σχέσεις

$$d\vec{x} = (a\omega_{31} + b\omega_{32})\,\varepsilon_1 + (bv_{31} + c\omega_{32})\varepsilon_2$$

$$d\vec{\varepsilon}_1 = (Q\omega_{31} + \overline{Q}\omega_{32})\vec{\varepsilon}_2 - \omega_{31}\,\vec{\varepsilon}_3 \; ,$$

$$d\vec{\varepsilon}_2 = -\,(Q\omega_{31} + \overline{Q}\omega_{32})\vec{\varepsilon}_1 - \omega_{32}\,\vec{\varepsilon}_3 \, ,$$

$$d\vec{\varepsilon}_3 = \omega_{31}\vec{\varepsilon}_1 + \omega_{32}\,\vec{\varepsilon}_2 \; .$$

Οἱ συνθῆκες ὁλοκληρωσιμότητος τοῦ προηγουμένου συστήματος εἶναι

$$\partial_2 Q + \partial_1\overline{Q} - Q^2 - \overline{Q}^2 - 1 = 0,$$

$$\partial_2 a - \partial_1 b + 2\overline{Q}b - Q(a - c) = 0,$$

$$\partial_2 b + \partial_1 c - 2Qb - \overline{Q}(a - c) = 0.$$

Συμβολίζουμε Δ_2^{III} τὸ δεύτερο τελεστὴ τοῦ Beltrami ὡς πρὸς τὴ μετρικὴ τῆς σφαιρικῆς εἰκόνος τῆς ἐπιφάνειας F, δηλαδὴ ὡς πρὸς τὴ μετρικὴ

$$III := \omega_{31}^2 + \omega_{32}^2$$

Ἡ συνάρτηση στηρίξεως $w(u,v)$ τῆς ἐπιφάνειας F εἶναι

$$w(u,v) = -\langle \vec{x}(u,v), \vec{\varepsilon}_3(u, v)\rangle,$$

ὅπου $<, >$ συμβολίζει τὸν ἐσωτερικὸ πολλαπλασιασμὸ διανυσμάτων. Μὲ χρήση τῶν προηγουμένων τύπων ἀποδεικνύεται ὁ γνωστὸς τύπος

(1) $$\Delta_2^{III} w + 2w = R_1 + R_2 \qquad \text{(J. Weingarten),}$$

ὅπου εἶναι

$$\Delta_2^{III}\,\omega = \frac{d < \dfrac{dw \wedge d\vec{x}}{\omega_{31}\,\omega_{32}}, d\vec{x} >}{\omega_{31} \wedge \omega_{32}},$$

δηλαδὴ

$$\Delta_2^{III} w = \partial_1\partial_1 w + \partial_2\partial_2 w - \overline{Q}\partial_1 w - Q\partial_2 w.$$

Ἀπὸ τὸν τύπο (1) τοῦ Weingarten προκύπτει: Ἡ ἐπιφάνεια F εἶναι ἀκριβῶς τότε ἐλαχιστικὴ ὅταν ἰσχύει

$$\Delta_2^{III} w = 2w + 2w = 0 \quad \forall\,(u, v) \in D.$$

2. *Ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος Rembs-Süss*: Προσανατολίζουμε τὴν ἐπιφάνεια F* ἔτσι ὥστε τὸ καθετικό της διάνυσμα νὰ εἶναι τὸ ἴδιο μὲ τὸ καθετικὸ διάνυσμα τῆς F, δηλαδὴ $\vec{\varepsilon}_3(u, v)$. Εἶναι

$$d\vec{y} = d\vec{x} - d\vec{x}^{\,*},$$

$$< d\vec{y}, \vec{\varepsilon}_3 > = < d\vec{x}, \vec{\varepsilon}_3 > - < d\vec{x}^{\,*}, \vec{\varepsilon}_3 > = 0$$

καὶ ἑπομένως τὸ $\vec{\varepsilon}_3(u, v)$ εἶναι ἐπίσης καθετικὸ διάνυσμα τῆς ἐπιφάνειας $\vec{y} = \vec{x} - \vec{x}^{\,*}$.

Ὥστε οἱ ἐπιφάνειες F, F* καὶ $\vec{y}$ ἔχουν τὴν ἴδια σφαιρικὴ εἰκόνα, ἄρα καὶ τὴν ἴδια τρίτη θεμελιώδη μορφὴ III. Συμβολίζουμε μὲ $w_1(u, v)$, $w_2(u, v)$, $w_3(u, v)$ τὶς συναρτήσεις στηρίξεως τῶν F, F*, $\vec{y}$ ἀντιστοίχως. Ἔχουμε

$$w_3 = - < \vec{y}, \vec{\varepsilon}_3 > = - < \vec{x} - \vec{x}^{\,*}, \vec{\varepsilon}_3 > = - < \vec{x}, \vec{\varepsilon}_3 > + < \vec{x}^{\,*}, \vec{\varepsilon}_3 >,$$

$$w_3 = w_1 - w_2.$$

Ἀπὸ τὶς σχέσεις

$$R_1 + R_2 = R_1^* + R_2^*,$$

$$\Delta_2^{III} w_1 + 2w_1 = R_1 + R_2,$$

$$\Delta_2^{III} w_2 + 2w_1 = R_1^* + R_2^*$$

καὶ ἀπὸ τὴ γραμμικὴ ἰδιότητα τοῦ τελεστῆ Δ_2^{III} προκύπτει

$$\Delta_2^{III}(w_1 - w_2) + 2(w_1 - w_2) = 0,$$

δηλαδὴ

$$\Delta_2^{III} w_3 + 2w_3 = 0$$

καὶ συνεπῶς ἡ ἐπιφάνεια $\vec{y}(u, v)$ εἶναι ἐλαχιστική.

Παρατηρήσεις 1. Μία ἄλλη ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος τῶν Rembs καὶ Süss ἔχουμε δώσει μὲ χρήση τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ τύπου τοῦ H.A. Schwarz

$$\int_{\partial D} \vec{\varepsilon}_3 x d\vec{x} = -2 \iint_D H\, \vec{\varepsilon}_3\ \alpha_1 \wedge \alpha_2,$$

ὅπου H εἶναι ἡ μέση καμπυλότητα τῆς ἐπιφάνειας καὶ ∂D τὸ σύνορο τοῦ τόπου D (βλ. Ν.Κ. Στεφανίδη, Διαφορικὴ Γεωμετρία τόμος I, σελ. 275-276).

2. Ὁ Σ. Σταματάκης στὴν ἐργασία του: Der 2. Beltramische Operator der dritten Grundform einer Fläche des E^3 (Proceedings of the 4th International Congress of Geometry, Thessaloniki 1996, σελ. 392-396) ἀποδεικνύει μεταξὺ ἄλλων τὸν τύπο

$$\Delta_2^{III} \vec{x} = \text{grad}^{III} R - R\vec{\varepsilon}_3, \quad R = R_1 + R_2. \tag{2}$$

Συνεπῶς ἡ ἐπιφάνεια εἶναι ἀκριβῶς τότε ἐλαχιστική, ὅταν ἰσχύει

$$\Delta_2^{III} \vec{x} = 0 \quad \forall\, (u, v) \in D.$$

Μὲ χρήση τῶν συμβόλων ποὺ χρησιμοποιήσαμε, ὁ τύπος (2) τοῦ Σταματάκη γράφεται

$$\Delta_2^{III} \vec{x} = -[\partial_1(R_1 + R_2)]\,\vec{\varepsilon}_1 - [\partial_2(R_1 + R_2)]\,\vec{\varepsilon}_2 + (R_1 + R_2)\,\vec{\varepsilon}_3. \tag{3}$$

Ἡ διαφορὰ τῶν προσήμων στοὺς τύπους (2) καὶ (3) ὀφείλεται στὸν διαφορετικὸ προσανατολισμὸ τοῦ συνοδεύοντος τὴν ἐπιφάνεια τριάκμου. Εἶναι προφανές, ὅτι στὴν ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος Rembs-Süss ποὺ ἐκθέσαμε προηγουμένως, μπορεῖ νὰ χρησιμοποιηθεῖ ὁ τύπος (3) ἀντὶ τοῦ τύπου (1) τοῦ Weingarten.

3. Ἀπὸ τὸν τύπο (3) προκύπτει

$$< \Delta_2^{III} \vec{x}, \vec{\varepsilon}_3 > = R_1 + R_2. \tag{4}$$

Ἀποδεικνύεται, ὅτι οἱ τύποι (1) καὶ (4) εἶναι ἰσοδύναμοι.

ZUSAMMENFASSUNG

E. Rembs und W. Süss haben unabhängig voneinander folgenden Satz bewiesen: Gegeben sind die Flächen

$$F : \vec{x} = \vec{x}\,(u, v),\ F^* : \vec{x} = \vec{x}^*\,(u, v) \quad (u, v) \in D.$$

Es wird angenommen, daß die Flächennormalen in entsprechenden Punkten von F und F* parallel sind. Gilt ferner für die Hauptkrümmungsradien R_1, $R_i^* = i = 1,2$ der Flächen F und F* die Beziehung

$$R_1\,(u, v) + R_2\,(u, v) = R_1^*\,(u, v) + R_2^*\,(u, v) \quad \forall\, (u, v) \in D,$$

so ist die Differenzfläche $\vec{y} = \vec{x}\,(u, v) - \vec{x}^*\,(u, v)$ eine Minimalfläche.

In dieser Note wird ein kurzer Beweis dieses Satzes, unter Verwendung der klassischen Formel von J. Weingarten

$$\Delta_2^{III} w + 2w = R_1 + R_2$$

gegeben, wobei w die Stützfunkion ist.