γανικὰ μὴ πτητικὰ δηλητήρια, δηλητήρια προερχόμενα ἀπὸ ζῷα καὶ δηλητήρια προερχόμενα ἀπὸ φυτά. Εἰς ἰδιαίτερον κεφάλαιον γίνεται λόγος περὶ τῶν τροφικῶν δηλητηριάσεων.

Εἰς τὸ τέλος ὑπάρχουν δύο πίνακες. Εἰς τὸν πρῶτον πίνακα δίδονται συνοπτικῶς τὰ μέτρα τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ λάβῃ ὁ ἰατρὸς εἰς ἑκάστην δηλητηρίασιν, εἰς δὲ τὸν δεύτερον ἀναφέρεται ἡ ποσολογία τῶν φαρμάκων δι᾿ ἐνηλίκους καὶ παιδία.

Τὸ βιβλίον τοῦτο εἶναι πλῆρες· πραγματεύεται ἀκόμη καὶ τοὺς κινδύνους οἵτινες προέρχονται ἀπὸ τὴν ραδιενέργειαν μὲ τὴν ὁποίαν ἀπειλεῖται τὸ ἀνθρώπινον γένος.

Μὲ μεγάλην σαφήνειαν ἀναφέρεται δι᾿ ἕκαστον δηλητήριον ἡ αἰτιολογία ἡ τοξικότης, τὰ συμπτώματα καὶ ἡ θεραπεία.

Οἱ συγγραφεῖς εἶναι ἄξιοι παντὸς ἐπαίνου διὰ τὸ τέλειον βιβλίον μὲ τὸ ὁποῖον ἐπλούτισαν τὴν ἰατρικὴν ἐπιστήμην.

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΙΣ ΜΕΛΟΥΣ

ΓΛΩΣΣΟΛΟΓΙΑ. — **Περὶ τῆς λέξεως «βομβόχυλον» παρὰ τῷ Διοσκορίδῃ**, ὑπὸ *Ἑρρ. Σκάσση*.

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ ΜΗ ΜΕΛΩΝ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.— **Die geometrische Bedeutung des analytischen Ausdruckes der Basis e des natürlichen Logarithmus**, *von A. I. Kokotsakis**. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Ἰωάνν. Ξανθάκη.

Die Kurve, die die Funktion $y=1/x$ darstellt, ist eine gleichseitige Hyperbel mit Asymptoten die x und y—Achsen.

Die Funktion:

$$y = \int_1^x \frac{dx}{x} = f(x)$$

hat die Eigenschaften der Logarithmusfunktion. Es ist nämlich:

---

* ΑΝΤ. Ι. ΚΟΚΟΤΣΑΚΙ, Ἡ γεωμετρικὴ σημασία τῆς ἀναλυτικῆς ἐκφράσεως τῆς βάσεως e τῶν φυσικῶν λογαρίθμων.

$$\int_{\alpha}^{\alpha\beta} \frac{dx}{x} = \int_{1}^{\beta} \frac{dx}{x} \quad \text{und infolgedessen}$$

$$\int_{1}^{\alpha\beta} \frac{dx}{x} = \int_{1}^{\alpha} \frac{dx}{x} + \int_{1}^{\beta} \frac{dx}{x},$$

wobei α und β positive Zahlen sind.

Daraus folgt nun für beliebige positive Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$

$$\int_{1}^{\alpha_1 . \alpha_2 . \alpha_3 \ldots \alpha_\nu} \frac{dx}{x} = \int_{1}^{\alpha_1} \frac{dx}{x} + \int_{1}^{\alpha_2} \frac{dx}{x} + \ldots + \int_{1}^{\alpha_\nu} \frac{dx}{x}$$

und für gleiche α

$$\int_{1}^{\alpha^\nu} \frac{dx}{x} = \nu \int_{1}^{\alpha} \frac{dx}{x}, \quad \text{bzw.} \quad \int_{1}^{1/\alpha} \frac{dx}{x} = -\int_{1}^{\alpha} \frac{dx}{x} \quad \text{u. s. w.}$$

Wir wollen nun die sogenannte Zahl e bestimmen, für welche

$$\int_{1}^{e} \frac{dx}{x} = 1$$

gilt.

Auf der x-Achse betrachten wir die Punkte A_0 mit $x_0 = 1$ und A_1 mit $x_1 = 1 + 1/\nu$, wobei ν eine ganze positive Zahl ist. So ist $\Delta x_1 = x_1 - x_0 = 1/\nu$ und der Flächeninhalt des Rechteckes $A_0 A_1 M'_1 M_0 A_0$ gleich $1/\nu$, wobei M_0 den auf der Hyperbel liegenden Punkt $(1, 1)$ bedeutet.

Da aber $y_1 = 1/x_1$ ist, bestimmen wir den Punkt A_2 derart, dass der Flächeninhalt des Rechteckes $A_1 A_2 M'_2 M_1 A_1$ auch gleich $1/\nu$ ist. Dann ist $\Delta x_2 \cdot 1/x_1 = 1/\nu$ oder $\Delta x_2 = x_1/\nu$ und, weil $x_2 = x_1 + \Delta x_2$ ist, so folgt:

$$x_2 = x_1 \left(1 + \frac{1}{\nu}\right) \quad \text{oder} \quad x_2 = \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^2.$$

Ebenso bestimmen wir den Punkt A_3 derart, dass der Flächeninhalt des Rechteckes $A_2 A_3 M'_3 M_2 A_2$ auch gleich $1/\nu$ ist. Dann ist $\Delta x_3 \cdot 1/x_2 = 1/\nu$ oder $\Delta x_3 = x_2/\nu$ und, weil $x_3 = x_2 + \Delta x_3$ ist, so folgt:

$$x_3 = x_2 \left(1 + \frac{1}{\nu}\right) \quad \text{oder} \quad x_3 = \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^3.$$

Und so weiter für die anderen Punkte bis zum Punkte A_ν, für welche ist:

$$x_\nu = x_{\nu-1}\left(1+\frac{1}{\nu}\right) \quad \text{oder} \quad x_\nu = \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu,$$

und der Flächeninhalt der treppenförmigen Figur

$$A_o A_\nu M'_\nu M_{\nu-1} \ldots M_2 M'_2 M_1 M'_1 M_o \text{ gleich } 1 \text{ ist.}$$

Da $y_1 = \frac{1}{x_1}$, $\Delta x_1 = \frac{1}{\nu}$ und $x_1 = 1 + \frac{1}{\nu}$ ist, so folgt dass:

$$y_1 = \frac{1}{1+1/\nu} \quad \text{oder} \quad y_1 = \frac{\nu}{\nu+1}$$

und der Flächeninhalt des Rechteckes $A_o A_1 M_1 M''_o$ gleich:

$$y_1 \cdot \Delta x_1 = \frac{\nu}{\nu+1} \cdot \frac{1}{\nu} = \frac{1}{\nu+1} \text{ ist.}$$

Ebenso sind die Flächeninhalte der anderen Rechtecken der unteren treppenförmigen Figur $A_o A_\nu M_\nu M''_{\nu-1} M_{\nu-1} \ldots M_2 M''_1 M_1 M''_o A_o$ alle gleich $\frac{1}{\nu+1}$

(und allgemein:

$$\text{Weil } x_\varrho = x_{\varrho-1}\left(1+\frac{1}{\nu}\right) \text{ und } \Delta x_\varrho = \frac{x_{\varrho-1}}{\nu} \text{ ist, so folgt:}$$

$$y_\varrho = \frac{1}{x_\varrho} = \frac{1}{x_{\varrho-1}} \cdot \frac{\nu}{\nu+1} \text{ und } y_\varrho \cdot \Delta x_\varrho = \frac{x_{\varrho-1}}{x_{\varrho-1}} \frac{1}{\nu} \cdot \frac{\nu}{\nu+1} = \frac{1}{\nu+1} \;)$$

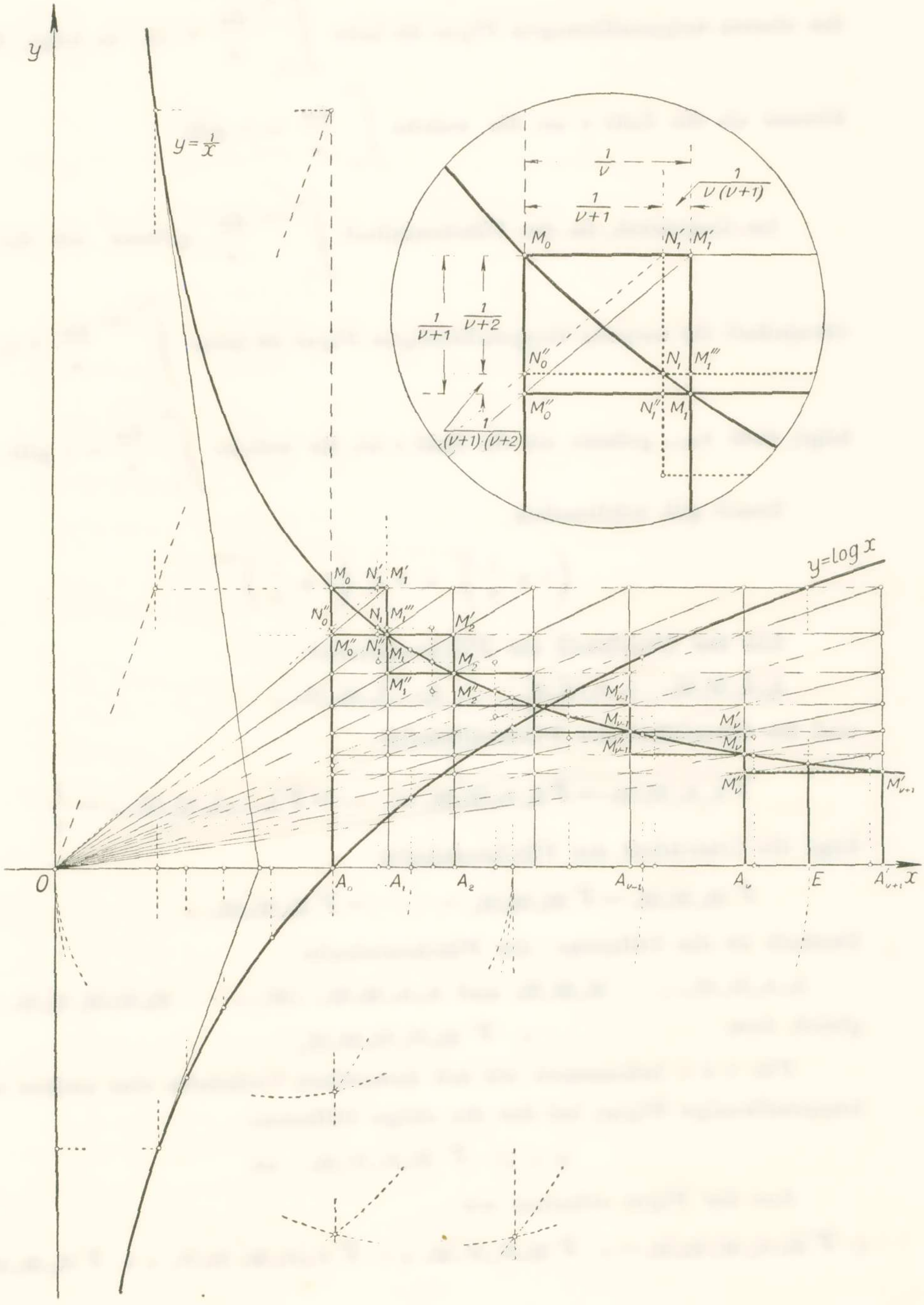
Wenn wir noch den Punkt $A'_{\nu+1}$ mit $x'_{\nu+1} = \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}$ bestimmen, so erhalten wir die treppenförmige Figur

$$A_o A'_{\nu+1} M'_{\nu+1} M''_\nu M_\nu M''_{\nu-1} M_{\nu-1} \cdots\cdots M_2 M''_1 M_1 M''_o,$$

deren Flächeninhalt ebenso gleich eins ist. Wir bemerken auch, dass die Inhalte der Flächen, welche von der Hyperbelkurve und der x-Achse einerseits und den in den Punkten $A_o, A_1, A_2, \ldots, A_\nu, A'_{\nu+1}$ Ordinaten bis zur Kurve andererseits begrenzt sind, zu einander gleich sind. Dies folgt aus der Bemerkung

$$\int_1^{x_1} \frac{dx}{x} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x} = \ldots = \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} \frac{dx}{x} = \int_{x_\nu}^{x'_{\nu+1}} \frac{dx}{x},$$

weil $x_2 = x^2_1$, $x_3 = x_2 x_1, \ldots, x_\nu = x_{\nu-1} x_1$ und $x'_{\nu+1} = x_\nu x_1$.


y
$y=\frac{1}{x}$
$y=\log x$
O
x
A_0
A_1
A_2
$A_{\nu-1}$
A_ν
E
$A'_{\nu+1}$
M_0
N'_1
M'_1
N''_0
N_1
M'''_1
M''_0
N''_1
M_1
M''_1
M'_2
M_2
M''_2
$M'_{\nu-1}$
$M_{\nu-1}$
$M''_{\nu-1}$
M'_ν
M_ν
M''_ν
$M'_{\nu+1}$
$\frac{1}{\nu}$
$\frac{1}{\nu+1}$
$\frac{1}{\nu(\nu+1)}$
$\frac{1}{\nu+2}$
$\frac{1}{(\nu+1)\cdot(\nu+2)}$

Weil aber der Flächeninhalt $\int_1^{x_\nu} \frac{dx}{x}$ kleiner als der Flächeninhalt der oberen treppenförmigen Figur ist (also $\int_1^{x_\nu} \frac{dx}{x} < 1$), so folgt, dass x_ν kleiner als die Zahl e ist, für welche $\int_1^{e} \frac{dx}{x} = 1$ gilt.

Im Gegenteil, da der Flächeninhalt $\int_1^{x'_{\nu+1}} \frac{dx}{x}$ grösser als der Flächeninhalt der unteren treppenförmigen Figur ist (also $\int_1^{x'_{\nu+1}} \frac{dx}{x} > 1$), so folgt, dass $x'_{\nu+1}$ grösser als die Zahl e ist, für welche $\int_1^{e} \frac{dx}{x} = 1$ gilt.

Somit gilt schliesslich

$$\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu} < e < \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}$$

Aus der Gleichheit der Flächeninhalte:

$A_0A_1M_1M_0$, $A_1A_2M_2M_1$, ..., $A_{\nu-1}A_\nu M_\nu M_{\nu-1}$

und der Gleichheit der Flächeninhalte:

$$FA_0A_1M'_1M_0 = FA_1A_2M'_2M_1 = \cdots\cdots = FA_{\nu-1}A_\nu M'_\nu M_{\nu-1} = \frac{1}{\nu}$$

folgt die Gleichheit der Flächeninhalte

$$F\,M_1M'_1M_0 = F\,M_2M'_2M_1 = \cdots\cdots = F\,M_\nu M'_\nu M_{\nu-1}\,.$$

Deshalb ist die Differenz der Flächeninhalte:

$A_0A_\nu M_\nu M_{\nu-1} \ldots . M_2M_1M_0$ und $A_0A_\nu M'_\nu M_{\nu-1}M'_{\nu-1} \cdots\cdots M_2M'_2M_1M'_1M_0$:

gleich dem $\nu \cdot F\,M_0N_1M_1M'_1M_0\,.$

Für $\nu+1$ bekommen wir mit demselben Verfahren eine andere obere treppenförmige Figur, bei der die obige Differenz

$(\nu+1)\cdot F\,M_0N_1N'_1M_0$ ist.

Aus der Figur erhalten wir:

$$\nu\cdot F\,M_0N_1M_1M'_1M_0 = \nu\cdot F\,M_0N_1N'_1M_0 + \nu\cdot F\,N'_1N_1M'''_1M'_1N'_1 + \nu\cdot F\,N_1M_1M'''_1N_1$$

und, weil $\nu \cdot F\, N_1'N_1M_1'''M_1'N_1' = F\, M_oN_o''N_1N_1'M_o$

$$= F\, M_oN_1N_1'M_o + F\, M_oN_o''N_1M_o \text{ ist, folgt:}$$

$$\nu \quad F\, M_oN_1M_1M_1'M_o = (\nu+1) \cdot F\, M_oN_1N_1'M_o + F\, M_oN_o''N_1M_o + \nu \cdot F\, N_1M_1M_1'''N_1.$$

Weil aber für $\nu + 1$ der Flächeninhalt der oberen treppenförmigen Figur auch eins ist und die obige Differenz kleiner wird, folgt dass:

$$\int_1^{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu} \frac{dx}{x} < \int_1^{\left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^{\nu+1}} \frac{dx}{x}$$

und so wird $\left(1+\dfrac{1}{\nu}\right)^\nu$ mit wachsendem ν grösser.

Entsprechend ist bei der unteren treppenförmigen Figur:

$$(\nu+1)\; F\, M_oM_o''M_1N_1M_o = (\nu+1)\; F\, M_oN_o''N_1M_o +$$

$$(\nu+1)\; F\, N_o''M_o''N_1''N_1N_o'' + (\nu+1)\; F\, N_1N_1''M_1N_1$$

und, weil $(\nu+1)\; F\, N_o''M_o''N_1''N_1N_o'' = F\, M_oN_o''N_1N_1'M_o$

$$= F\, M_oN_o''N_1M_o + F\, M_oN_1N_1'M_o$$

ist, so folgt:

$$(\nu+1)\; F\, M_oM_o''M_1N_1M_o = (\nu+2)\; F\, M_oN_o''N_1M_o +$$

$$F\, M_oN_1N_1'M_o + (\nu+1)\; F\, N_1N_1''M_1N_1$$

und wird die entsprechende Differenz für $(\nu+1)$ kleiner als für ν.

Weil aber der Flächeninhalt der treppenförmigen Figur konstant bleibt, so folgt:

$$\int_1^{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}} \frac{dx}{x} > \int_1^{\left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^{\nu+2}} \frac{dx}{x}$$

und wird $\left(1+\dfrac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}$ mit wachsendem ν kleiner.

Lassen wir nun ν über alle Grenzen wachsen, so entnehmen wir der Anschauung, dass sich die beiden (mit konstanten Flächeninhalten), treppenförmigen Figuren einander immer mehr nähern, und der gemeinsamen Grenzfigur, mit dem Wert $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x}$, zustreben, und gleichzeitig die beiden Grössen $\left(1+\dfrac{1}{\nu}\right)^\nu$ (immer grösser) und $\left(1+\dfrac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}$ (immer kleiner) sich nähern und dem gemeinsamen Grenzwert e zustreben werden.

Bei diesem Verfahren ist zu merken dass:

$$\text{aus} \quad y_1 = \frac{1}{x_1} \quad \text{und} \quad y_2 = \frac{1}{x_2} \cdots \text{folgt}$$

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_2}{x_1} = 1 + \frac{1}{\nu} \quad \text{und im allgemeinen}$$

$$\frac{y_{\nu-1}}{y_\nu} = \frac{x_\nu}{x_{\nu-1}} = \frac{x_2}{x_1} = 1 + \frac{1}{\nu}$$

Die durch die obigen Punkte $M_0, M_1, M_2, \ldots$ der Hyperbel zu den x und y-Achsen parallele Geraden bilden ein Gewebe, und durch die so bestimmte Punkte noch eine Schar von Strahlen, welche durch den O Punkt gehen, und eine Schar von Hyperbeln, mit gemeinsamen Asymptoten die x und y-Achsen, hindurchgehen.

Die betrachteten Hyperbeln der Schar haben also die Gleichungen: ausser $xy = 1$ noch

$$xy = 1 + \frac{1}{\nu}, \quad xy = \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^2, \ldots\ldots, \quad xy = \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}$$

$$\text{und} \quad xy = \frac{\nu}{\nu+1}, \quad xy = \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^2, \ldots\ldots, \quad xy = \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{\nu+1}.$$

Mit demselben Verfahren bekommen wir

$$\left(1 - \frac{1}{\nu+1}\right)^{\nu+1} < \frac{1}{e} < \left(1 - \frac{1}{\nu+1}\right)^{\nu}.$$

Es ist noch zu merken, dass der Punkt, in dem die Gerade OM_ν'' die Hyperbel schneidet, als Abszisse das geometrische Mittel von

$$\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{\nu} \text{ und } \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1} \text{ d}\cdot\text{h}\cdot \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{2\nu+1}} \text{ oder } \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{\nu} \sqrt{1 + \frac{1}{\nu}} \text{ hat.}$$

Wie oben, dann ist die Differenz

$$\int_1^{\left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^{\nu+1}} \frac{dx}{x} - \int_1^{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}} \frac{dx}{x} \quad \text{gleich dem}$$

$$\text{Flächeninhalt} \quad F\, M_0 N_0'' N_1 M_0 + \nu\, F\, N_1 M_1 M_1''' N_1 \quad \text{und}$$

$$\int_1^{\left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^{2(\nu+1)}} \frac{dx}{x} - \int_1^{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{2\nu}} \frac{dx}{x} =$$

$$= 2\, F\, M_0 N_0'' N_1 M_0 + 2\nu \cdot F\, N_1 M_1 M_1''' N_1 < F\, M_0 M_0'' N_1'' N_1' \text{ ist.}$$

Weil aber $\int_1^{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{2\nu+1}} \frac{dx}{x} - \int_1^{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{2\nu}} \frac{dx}{x} = \int_1^{1+\frac{1}{\nu}} \frac{dx}{x}$,

$$\int_1^{\left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^{2(\nu+1)+1}} \frac{dx}{x} - \int_1^{\left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^{2(\nu+1)}} \frac{dx}{x} = \int_1^{1+\frac{1}{\nu+1}} \frac{dx}{x} \text{ und}$$

$$\int_1^{1+\frac{1}{\nu}} \frac{dx}{x} - \int_1^{1+\frac{1}{\nu+1}} \frac{dx}{x} =$$

$$F\, M_o M_o'' N_1'' N_1' + F\, N_1 N_1'' M_1 N_1 > F\, M_o M_1'' N_1'' N_1'$$

ist, so folgt, dass $\int_1^{\left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^{2(\nu+1)+1}} \frac{dx}{x} < \int_1^{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{2\nu+1}} \frac{dx}{x}$ ist

und infolgedessen

$$\left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^{2(\nu+1)+1} < \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{2\nu+1} \text{ und daraus}$$

$$\sqrt{\left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^{2(\nu+1)+1}} < \sqrt{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{2\nu+1}}.$$

Also mit wachsendem ν wird $\sqrt{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{2\nu+1}}$ kleiner.

Lassen wir nun wieder ν über alle Grenzen wachsen so entnehmen wir der Anschauung, dass sich die beiden bis $\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{2\nu+1}$ treppenförmigen Figuren, mit Flächeninhalten die obere $2+\frac{1}{\nu}$ und die untere $2-\frac{1}{\nu+1}$, immer einander nähern und der gemeinsamen Grenzfigur, mit dem Wert $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x} = 2$, zustreben, und die Grössen $\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{2\nu+1}$ und $\sqrt{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{2\nu+1}}$ (immer kleiner) entsprechend den Grenzwerten e^2 und e zustreben werden.

Merkwürdig bei der Folge $\sqrt{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{2\nu+1}}$ ist, dass für $\nu=1$ der Wert $2\sqrt{2}$ d. h. 2,8284 .... gilt.

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Ὁ συγγραφεὺς ἐν τῇ παρούσῃ ἀνακοινώσει του ἐπιτυγχάνει τὴν εὕρεσιν τῆς ἀναλυτικῆς ἐκφράσεως τῆς βάσεως e τῶν φυσικῶν λογαρίθμων διὰ γεωμετρικῆς ὁδοῦ.

Κατασκευάζει δύο κλιμακοειδεῖς ἐπιφανείας ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς ἰσοσκελοῦς ὑπερβολῆς $y=\frac{1}{x}$, ἀρχόμενος ἐκ τοῦ σημείου M_0 μὲ συντεταγμένας 1 καὶ 1 καὶ μὲ σημεῖα ἐπὶ τῆς καμπύλης τῆς ὑπερβολῆς τὰ $M_1, M_2, \ldots, M_\nu$ οὕτως, ὥστε τὰ ὀρθογώνια τῆς ἀνωτέρας κλιμακοειδοῦς, ν τὸ πλῆθος, νὰ ἔχουν ἐμβαδὰ ἴσα μεταξύ των, μὲ κοινὴν τιμὴν $1/\nu$, ὅτε τὸ ὅλον ἐμβαδὸν εἶναι ἴσον πρὸς τὴν μονάδα καὶ τὰ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων x ἀντίστοιχα σημεῖα $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_\nu$, θὰ ἔχουν τετμημένας $x_1=1+\frac{1}{\nu}$, $x_2=\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^2$, $x_3=\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^3, \ldots\ldots, x_\nu=\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu$.

Τὰ ὀρθογώνια τῆς ἀντιστοίχου κατωτέρας κλιμακοειδοῦς ἔχουν ἐμβαδὰ ἐπίσης ἴσα μεταξύ των, μὲ κοινὴν τιμὴν $\frac{1}{\nu+1}$, ὅτε προστίθεται ἓν ἀκόμη ὀρθογώνιον καὶ τὸ ὅλον ἐμβαδὸν εἶναι ἴσον πρὸς τὴν μονάδα, ἡ δὲ τετμημένη τοῦ τελευταίου σημείου $M'_{\nu+1}$ ἴση πρὸς $x'_{\nu+1}=\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}$.

Ἐκ τοῦ ὅτι $x_2=x_1^2$, $x_3=x_2x_1, \ldots\ldots, x_\nu=x_{\nu-1}x_1$ καὶ $x'_{\nu+1}=x_\nu x_1$ προκύπτει, ὅτι καὶ τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἐπιφανειῶν, τῶν περιοριζομένων, ὑπὸ τῆς καμπύλης τῆς ὑπερβολῆς, τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ τῶν διὰ τῶν σημείων $A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots,$ A_ν καὶ $A'_{\nu+1}$ παραλλήλων πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y, εἶναι ἴσα μεταξύ των μὲ κοινὴν τιμὴν μεγαλυτέραν τοῦ $\frac{1}{\nu+1}$ καὶ μικροτέραν τοῦ $\frac{1}{\nu}$ οὕτως, ὥστε τὸ

$$\int_1^{x_\nu}\frac{dx}{x}<1 \text{ καὶ τὸ } \int_1^{x'_{\nu+1}}\frac{dx}{x}>1$$

καὶ ἡ τιμὴ τοῦ x, ἣν καλοῦμεν e, δι' ἣν $\int_1^e\frac{dx}{x}=1$, θὰ εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν τιμῶν $\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu$ καὶ $\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}$ ἤτοι $\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu<e<\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}$.

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων τῶν ἐμβαδῶν τῶν ὀρθογωνίων τῆς ἀνωτέρας κλιμακοειδοῦς ἐπιφανείας, τῶν ἰσοτήτων τῶν ἐμβαδῶν τῶν ὀρθογωνίων τῆς κατωτέρας κλιμακοειδοῦς καὶ τῶν ἰσοτήτων τῶν ἐμβαδῶν τῶν ὡς ἄνω τμημάτων τῆς εἰς τὴν καμπύλην ἀντιστοιχούσης ἐπιφανείας προκύπτει ἡ ἰσότης τῶν ἐμβαδῶν τῶν μικτογράμμων τριγώνων τῶν ὑπερκειμένων τῆς καμπύλης (τῶν ὑπὸ ταύτης ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τῆς ὑπερκειμένης κλιμακοειδοῦς ἀποχωριζομένων), ὡς ἐπίσης καὶ ἡ ἰσότης τῶν ἐμβαδῶν

τῶν μεταξὺ τῆς καμπύλης καὶ τῆς κατωτέρας κλιμακοειδοῦς μικτογράμμων τριγώνων. Οὕτως ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἀνωτέρας κλιμακοειδοῦς καὶ τῆς ἐπιφανείας, τῆς ἀντιστοιχούσης εἰς τὴν καμπύλην, εἶναι τὸ ν - πλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ πρώτου τριγώνου, ἐκ τῆς συγκρίσεως τοῦ ὁποίου μὲ τὸ ἀντίστοιχον τῆς ἀνωτέρας ἐπίσης κλιμακοειδοῦς, διὰ $\nu+1$ ὅμως, ἀποδεικνύεται διὰ καθαρῶς γεωμετρικῆς ὁδοῦ, ὅτι, αὐξανομένου τοῦ ν, ἡ ὡς ἄνω διαφορὰ ἐλαττοῦται καὶ κατὰ συνέπειαν τὸ $\int_1^{x_\nu} \frac{dx}{x}$ αὐξάνεται, ἑπομένως καὶ τὸ $\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu$ αὐξάνεται.

Ἀντιθέτως ἀποδεικνύεται ὁμοίως, ὅτι, αὐξανομένου τοῦ ν, τὸ $\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}$ ἐλαττοῦται.

Τοιουτοτρόπως, αὐξανομένου τοῦ ν ἀπεριορίστως, αἱ δύο κλιμακοειδεῖς ἐπιφάνειαι, ἔχουσαι σταθερὰ ἐμβαδὰ (ἴσα πρὸς τὴν μονάδα), πλησιάζουν καὶ τείνουν πρὸς τὴν ὁριακὴν μορφήν, τῆς ἐπιφανείας, δι' ἣν $\int_1^e \frac{dx}{x} = 1$, καὶ τὰ δύο μεγέθη $\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu$ καὶ $\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}$, τὸ πρῶτον συνεχῶς αὐξανόμενον καὶ τὸ δεύτερον συνεχῶς ἐλαττούμενον, πλησιάζουν καὶ τείνουν πρὸς τὸ κοινὸν ὅριον, τὸν ἀριθμὸν e

$$\underset{\nu\to\infty}{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu} = \underset{\nu\to\infty}{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}} = e$$

Πρὸς τούτοις ὁ συγγραφεὺς παρατηρεῖ, ὅτι, ὡς ἀποδεικνύεται, αἱ διὰ τῶν ὡς ἄνω σημείων τῆς ὑπερβολῆς ἀγόμεναι παράλληλοι πρὸς τοὺς ἄξονας συντεταγμένων ἀποτελοῦν πλέγμα μὲ ὀρθογώνια, τῶν ὁποίων ἡ μία κατηγορία τῶν διαγωνίων ἀνήκει εἰς δέσμην εὐθειῶν, διερχομένων διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων, ἡ δὲ ἄλλη εἶναι χορδαὶ μιᾶς οἰκογενείας ὑπερβολῶν μὲ ἀσυμπτώτους τοὺς ἄξονας συντεταγμένων.

Μὲ τὴν ἰδίαν δὲ ὡς ἄνω μέθοδον προκύπτει καὶ ἡ σχέσις

$$\left(1-\frac{1}{\nu+1}\right)^{\nu+1} < \frac{1}{e} < \left(1-\frac{1}{\nu+1}\right)^{\nu}.$$

Τελικῶς ὁ συγγραφεὺς ἀποδεικνύει, ἐπίσης γεωμετρικῶς, ὅτι καὶ τὸ γεωμετρικὸν μέσον τῶν $\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu$ καὶ $\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}$ ἤτοι $\sqrt{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu\cdot\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}}$ ἢ $\sqrt{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{2\nu+1}}$ ἢ καὶ ἄλλως $\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu \sqrt{1+\frac{1}{\nu}}$ αὐξανομένου τοῦ ν ἐλαττοῦται καὶ τείνει εἰς τὸ ὅριον e, αὐξανομένου τοῦ ν ἀπεριορίστως.

Ἀξιόλογον ἐν προκειμένῳ εἶναι, ὅτι διὰ $\nu=1$ τὸ ὡς ἄνω γεωμετρικὸν μέσον λαμβάνει τὴν τιμὴν $2\cdot\sqrt{2}=2{,}8284\ldots\ldots$ ἐν ᾧ ὁ $e=2{,}71828\ldots\ldots$