ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ ΜΗ ΜΕΛΩΝ

ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ.— **Une application du complété de Krasner sur les nombres de Prüfer,** *par Lambros Dokas* *. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ Ἀκαδημαϊκοῦ κ. Φίλ. Βασιλείου.

Cette note est consacrée à la définition des nombres de Prüfer comme un complété d'ensemble N des nombres entiers positifs. C'-est-à dire, on considère l'ensemble N partiellement ordonné par la relation d'ordre de la divisibilité

«Soient m, $n \in N$, $m < n \Longleftrightarrow m$ divise n»

Donc, le completé d'ensemble N de Krasner est l'ensemble des nombres de Prüfer. Pour faciliter la compréhension du lecteur on commence par donner les définitions des complétés de Dédékind, Kurepa, Krasner.

1. Complété de Dédékind.

Soit $\mathfrak{E} = (E, <)$ une structure d'ordre partiel de support E et soit $>$ l'ordre de E opposé a $<$. Si a, $b \in E$ sont tels que $a \leq b$, l'ensemble $\{x \in E : a \leq x \leq b\}$ sera noté [a, b] et appelé un segment.

On appelle coupure de E tout couple

$$c = (E_1, E_2) \text{ tel que}$$

1) $(\forall e_1 \in E_1)\ (\forall e_2 \in E_2)\ [e_1 < e_2]$
2) $(\forall e_1 \in E_1)\ [e_1 < e_2] \Rightarrow e_2 \in E_2$
3) $(\forall e_2 \in E_2)\ [e_1 < e_2] \Rightarrow e_1 \in E_1$

Il est évident que si deux coupures ont une même classe inférieure ou une même classe supérieure, elles coincident. Ainsi la donnée d'une classe d'une coupure définit cette coupure (et en particulier son autre classe).

Si $e \in E$ posons $E_1(e) = \{x \in E : x \leq e\}$ et $E_2(e) = \{x \in E : x \geq e\}$. $c = (E_1, E_2)$ est dit un saut, si E_1 a le plus grand élément et E_2 a le plus petit élément. Il est dit une lacune, si E_2 n'a pas de plus grand élément ni E_1 de plus petit.

* ΛΑΜΠΡΟΥ ΝΤΟΚΑ, Ἐφαρμογὴ τοῦ συμπληρώματος **Krasner** εἰς τοὺς ἀριθμοὺς **Prüfer.**

Le plus grand élément de la classe inférieure E_1 d' une coupure $c = (E_1, E_2)$ et le plus petit élément de sa classe supérieure E_2 sont dits, quand ils existent, les éléments extrêmes de ces classes, $C(E)$ étant l'ensemble des coupures de E, qui ne sont pas des sauts, ordonné de la manière habituelle.

$[c' = (E'_1, E'_2) < c'' = (E''_1, E''_2) \Longleftrightarrow E'_1 \subset E''_1]$, soit $C^*(E) = C(E) \cup E$. Ordonnons $C^*(E)$ en ajoutant aux relations d'ordre de E et de $C(E)$ les inégalités supplémentaires de la forme $(E \ldots E_2(e), E_2(e)) < e$ [1] et $e < (E_1(e), E \ldots E_1(e))$ pour tous les $e \in E$ tels que $(E \ldots E_2(e), E_2(e))$ respectivement $(E_1(e), E \ldots E_1(e))$ soit $\in C(E)$.

Soit $\sim$ la relation d'équivalence la plus fine dans $C^*(E)$ telle que si $c = (E_1, E_2) \in C(E)$ et si $e \in E$ on ait $c \sim e$ si et seulement si e est l'élément extrême d'une des classes E_1 ou E_2 de la coupure c.

Le complété de Dédékind de $(E, <)$ est l' ensemble ordonné. $\mathfrak{E}_D = (C^*(E)/\sim, <)$. Cette définition est cohérente.

Le support $E/\sim$ de $\mathfrak{E}_D$ s' identifie avec $E \cup L(E)$ où $L(E)$ est l'ensemble de lacunes de E, E et $L(E)$ étant des sous-ensembles disjoints de ce support et l'ordre de $\mathfrak{E}_D$ induit, sur chacun de ces sous-ensembles, son ordre naturel.

2. Complété de Kurepa.

Soient $C^-(E)$ l' ensemble de toutes les classes inférieures E_1 de coupures.

$c = (E_1, E_2) \in C(E)$ de E et $C^+(E)$ celui des classes supérieures E_2 de mêmes coupures. Soit $\sim^\cdot$ la relation d'équivalence la plus fine dans $C^\cdot(E) = C^-(E) \cup C^+(E) \cup E$ telle que tout $e \in E$ soit équivalent (mod $\sim^\cdot$) avec toute classe $\in C^-(E) \cup C^+(E)$ dont il est l' élément extrême.

On identifiera encore un $e \in E$ avec sa classe (mod $\sim^\cdot$). On définira comme suit une relation de préordre dans $C^\cdot(E)$ en posant : $e_1 \leq e_2$ $(e_1, e_2 \in E)$ si et seulement si l'on a la même relation dans E.

(1) $E \ldots E_2(e) = \complement_E E_2(e)$.

$$e \leq E_1 \ (e \in E,\ E_1 \in C^-(E)) \Longleftrightarrow e \in E_1.$$

$$E_1 \leq e \ (e \in E,\ (E_1, E_2) \in C(E)) \Longleftrightarrow e \in E_2 \text{ où}$$

e est l'élément extrême de E_1.

$$e \leq E_2 \ (e \in E,\ (E_1, E_2) \in C(E)) \Longleftrightarrow e \in E_1 \text{ où}$$

e est l'élément extrême de E_2

$$E_2 \leq e \ (e \in E,\ E_2 \in C^+(E)) \Longleftrightarrow e \in E_2$$

$$E_1 \leq E'_1 \ (E_1, E'_1 \in C^-(E)) \Longleftrightarrow E_1 \subseteq E'_1$$

$$E_1 \leq E'_2 \ [(E_1, E_2), (E'_1, E'_2) \in C(E)] \Longleftrightarrow E_1 \subseteq E'_1$$

où E_1 et E'_2 on un même élément extrême.

$$E_2 \leq E'_1 \ [(E_1, E_2), (E'_1, E'_2) \in C(E)] \Longleftrightarrow E_2 \supset E'_2$$

$$E_2 \leq E'_2 \ [(E_2, E'_2) \in C^+(E)] \Longleftrightarrow E_2 \supseteq E'_2$$

Soient $e \in E$ et $c = (E_1, E_2) \in C(E)$ alors cette définition de préordre est cohérente et la relation d'équivalence, qui lui correspond, est precisement $\sim$.

Déterminons maintenant la relation d'équivalence $x \equiv y \Longleftrightarrow x \leq y$ et $y \leq x$ du préordre précédent. Il suffit de considérer le cas:

a) $x, y \in E$; b) $x \in E, y \in C^-(E)$; c) $x \in E, y \in C^+(E)$; d) $x, y \in C^-(E)$; e) $x \in C^-(E), y \in C^+(E)$; f) $x, y \in C^+(E)$.

Dans le cas a) $x \leq y$ et $y \leq x$ dans $C^{\bullet}(E)$ signifie la même relation dans E, donc $x = y$. Dans le cas b) si $y = E_1$ et si $c = (E_1, E_2)$ est la coupure qu'il définit, $x \leq y \Longleftrightarrow x \in E_1$ et $y \leq x$ signifie que $x \in E_2$ ou x est le plus grand élément de E_1. Ainsi $x \equiv y \Longleftrightarrow y = E_1(x)$. On voit de manière analogue en remplaçant $<$ par $>$, que dans le cas c) $x \equiv y \Longleftrightarrow y = E_2(x)$.

Dans le cas d) si l'on considère x et y comme sous-ensembles de E $x \leq y \Longleftrightarrow x \subseteq y$, $y \leq x \Longleftrightarrow y \subseteq x$, donc $x \equiv y \Longleftrightarrow x \subseteq y$ et $y \subseteq x \Longleftrightarrow x = y$.

Dans le cas e) si l'on pose $x = E_1 \in C^-(E)$, $y = E'_2 \in C^+(E)$, $x \leq y$ signifie que $E_1 \subseteq E'_1$ ou que E_1 et E'_2 ont un élément extrême commun e, et $y \leq x \Longleftrightarrow E_1 \supset E'_1 \Longleftrightarrow E_2 \subset E'_2$. Mais $E_1 \subseteq E'_1$ et $E_1 \supset E'_1$, sont incompatibles tandis que l'existence de l'élément extrême commun e de E_1 et de E'_2 implique $E'_1 \subset E_1$; ainsi dans ce cas,

$$x \equiv y \Longleftrightarrow (\exists\, e \in E)\ [x = E_1(e) \wedge y = E_2(e)].$$

Enfin dans le cas f) en considérant $x, y \in C^+(E)$ comme sous-ensembles, de E, on a $x \leq y \Longleftrightarrow x \subseteq y$ et $y \leq x \Longleftrightarrow y \subseteq x$ d'où resulte $x \equiv y \Longleftrightarrow x \subseteq y$ et $y \subseteq x \Longleftrightarrow x = y$;

Soit $e \in E$. En vertu de la définition de $\sim^{\cdot}$ on a, si $E_1(e) \in C^-(E)$ respectivement $E_2(e) \in C^+(E)$, $e \sim^{\cdot} E_1(e)$ respectivement $e \sim^{\cdot} E_2(e)$. Ainsi si les deux conditions sont remplies simultanément, on a $E_1(e) \sim^{\cdot} E_2(e)$. Il en resulte $x \equiv y \Rightarrow x \sim^{\cdot} y$ et que tout $e \in E$ est congrü (mod $\equiv$) avec toute classe $\in C^-(E) \cup C^+(E)$ dont il est l'élément extrême. Comme $\equiv$ est une équivalence est comme $\sim^{\cdot}$ est l'équivalence la plus fine satisfaisant à la condition précédente, $\equiv$ coïncide avec $\sim^{\cdot}$

$C^{\cdot}(E)/\sim^{\cdot}$, organisé par l'ordre induit par le préordre précédent et où est plongé dans cet ensemble par identification de $e \in E$ avec sa classe (mod $\sim^{\cdot}$), sera dit le complété de Kurepa de $(E, <)$.

Soient $e \in E$ et $c = (E_1, E_2) \in C(E)$. Alors, si $e \sim^{\cdot} E_1$, E_2 sera noté e^+ et si $e \sim^{\cdot} E_2$, E_1 sera noté e^-. Bien entendu pour un e donné il peut exister ou ne pas exister des E_1, E_2 tels que $e \sim^{\cdot} E_1$ ou $e \sim^{\cdot} E_2$, autrement dit, selon le choix de e, ou bien aucun des e^-, e^+ n'existe, ou bien il en existe un seul, ou bien tous les deux existent. Et si $l = (E_1, E_2) \in C(E)$ est une lacune, E_1 et E_2 seront notés l^- et l^+, ainsi, tout élément $e^{\cdot}$ du complété de Kurepa de E a la forme $e^{*\xi}$, où e^* est un élément du complété de Dédékind de E (dit la valeur dédékindienne de $e^{\cdot}$), tandis que ξ est un des signes $\{-, 0, +\}$ (où on pose $e = e^*$ pour tout $e \in E$) et dit espèce de e^*.

3. Complété de Krasner.

Soit A un sous-ensemble de E et soit $\prec$ un ordre total de A. Si $a \in A$, $A_a = \{x \in A, a \preceq x\}$ sera dit le bout final de $(A, \prec)$ d'origine a.

La structure ordonnée $(A, \prec)$ est dite monotone si $\prec$ est la restriction à A de $<$ [auquel cas $(A, \prec)$ est dite cogrédiente de $(E, <)$] ou de $>$ [auquel cas $(A, \prec)$ sera dite contragrédiente de $(E, <)$].

Il est visible que $(A, \prec)$ ne peut être à la fois co- et contragrédiente que si A est un singleton; $\{a\}$ $(a \in E)$. $(A, \prec)$ est dit asymptotiquement monotone s'il existe un bout final A_a de $(A, \prec)$ tel que $(A_a, \prec)$ soit monotone. S'il en est ainsi, a sera dit un début de monotonie, si $(A_a, \prec)$ a le dernier élément a^*, $(A_{a^*}, \prec) = (\{a^*\}, \prec)$ est à la fois co- et contragrédient et $(A_a, \prec)$ sera dit alors asymptotiquement constant. Sinon, quelque soit le début de monotonie $a \in A$, les $(A_a, \prec)$ ou bien sont toutes cogrédientes ou bien toutes contragrédientes auxqueles cas respectifs $(A, \prec)$ sera dit as - cogrédient ou as - contragrédient.

Deux sous-structures as-monotones $(A, \prec_1)$ et $(B, \prec_2)$ seront dites équivalentes $[(A, \prec_1) \equiv (B, \prec_2)]$ si pour tout début de monotonie a de $(A, \prec_1)$ et pour tout début de monotonie b de $(B, \prec_2)$, on peut, quelque soit $x \in A_a$ trouver un $y \in B_b$ et un $z \in A_a$ de manière que $x \preceq_1 z$, et y soit $\in [x, z]$ [il s'agit, bien entendu, de segment dans l'ensemble ordonné $(E, <)$].

Si $(A, \prec_1)$ a le dernier élément a^*, une telle équivalence signifie évidement que a^* est aussi le dernier élément de $(B, \prec_2)$ et la condition d'équivalence est bien satisfaite en posan $y = z = a^*$. Si ce n'est pas le cas, $(A, \prec_1)$ et $(B, \prec_2)$ ne peuvent être équivalentes que si $(B, \prec_2)$ n'a pas de dernier élément et $(A, \prec_1)$ et $(B, \prec_2)$ tous les deux sont as - congrédientes ou as - contragrédientes en même temps.

On peut faire correspondre à chaque $\mathbf{a} = (A, \prec)$ asymptotiquement monotone un certain élément $\bar{\mathbf{a}}$ du complété de Kurepa de $(E, <)$. Si $\mathbf{a}$ a le dernier élément a^*, on prendre comme $\bar{\mathbf{a}}$ la classe de a^* (mod $\sim$). Si $\mathbf{a}$ n'a pas de dernier élément soit a un début de monotonie de $\mathbf{a}$. Si $\mathbf{a}$ est cogrédient, soit $E_2 = \{v \in E, (\forall x \in A_a)[v > x]\}$ et soit $E_1 = \{u \in E, (\forall v \in E_2)[u < v]\}$ visiblement (E_1, E_2) est une coupure.

Ce n'est pas un saut, car si E_1 a le plus grand élément e^*, on a pour tout $x \in A_a \subseteq E_1$ $x \leq e^*$ comme A_a n'a pas de plus grand élément, ceci entraine $e^* \notin A_a$ et pour tout $x \in A_a$, $x < e^*$, donc $e^* \in E_2$ ce qui est contradictoire. Ainsi E_1 est un élément du complété de Kurepa de E, dont l'espèce est —. On pose dans ce cas, $\bar{\mathbf{a}} = E_1$. Et si $\mathbf{a}$ est contragrédient, soient $E_2 = \{v \in E; (\forall x \in A_a)[v < x]\}$ et $E_1 = \{u \in E; (\forall v \in E_2)[u < v]\}$. On voit encore que (E_1, E_2) est une coupure de E, qui n'est pas un saut, car E_2 n'a pas de plus petit élément, et si l'on pose $\bar{\mathbf{a}} = E_2$, $\bar{\mathbf{a}}$ est un élément du complété de Kurepa de E d'espèce +. Il est visible que si $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, $\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{b}}$. On pose $\mathbf{a} = (A, \prec_1) \leq \mathbf{b} = (B, \prec_2)$ si $\mathbf{a} \equiv \mathbf{b}$ ou s'il existent des débuts de monotonie a, b de $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, tels que pour tout $x \in A_a$ et pour tout $y \in B_b$ on a $x < y$ un préordre de l'ensemble $M(E)$ des structures ordonnées asymptotiquement monotones de E, dont $\equiv$ est la relation d'équivalence. $E_{kr} = M(E)/\equiv$, ordonné pour l'ordre qu'induit le préordre de $M(E)$ qu'on vient de définir, va être appelé le complété de Krasner de E, et noté $(E, <)$ kr [ou E_{kr} si la confusion n'est pas à craindre]. Un $e \in E$ sera identifié avec la classe des $\mathbf{a} \in M(E)$ as-constante dont e est le dernier élément. Puisque $\mathbf{a} = \mathbf{b} \Longrightarrow \overline{\mathbf{a}} = \overline{\mathbf{b}}$ $(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in M(E))$. $\overline{\mathbf{a}}$ ne dépend que de la classe $C(\mathbf{a})$ de (mod $\equiv$) et sera aussi notée $\overline{C(\mathbf{a})}$ et dite la valeur Kurepienne de $C(\mathbf{a}) \in E_{kr}$.

Visiblement, $C < C'$ $(C, C' \in E_{kr})$ implique $\overline{C} \leq \overline{C'}$. La valeur dédékindienne $d(\overline{C})$ de $\overline{C}$ $(C \in E_{kr})$ et son espèce $\xi(\overline{C})$ seront dits aussi valeur dédékindienne et espèce de C.

Soient $\mathfrak{E} = (E, <)$ et $\mathfrak{E}' = (E', <)$ deux ensembles partiellement ordonnés et soit $f : E \rightarrow E'$ une application de E dans E'.

Soient $\mathfrak{E}_{kr} = (E^*, <)$ $\mathfrak{E}'_{kr} = (E^{*\prime}, <)$ les complétés de Krasner de $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}'$. Alors il est possible d'étendre canoniquement f à certains $e^* \in E^*$. Soit $\mathbf{a} = (A, \prec) \in e^*$. On dira que f est définie asymptotiquement sur $\mathbf{a}$, s'il existe un $a \in A$ tel que les images inverses des $e' \in f(A_a)$ soient toutes des intervalles de A_a.

Dans ce cas, l'ordre $\prec$ de $\mathbf{a}$ induit un ordre sur $f(A_a)$, en posant, pour tous $x, y \in A_a$ $f(x) \prec f(y) \Longleftrightarrow x \prec y$ (cette définition est cohérente, car $f^{-1} . (f . x) \cap A_a$ est un intervalle de A_a).

Notons cet ordre $\prec_f$ et appelons $f . \mathbf{a}_a = (f(A_a), \prec f)$ une image asymptotique de $\mathbf{a}$. Alors on a le *Lemme:*
Si tout $\mathbf{a} \in e^*$ possède une image asymptotique $f(\mathbf{a}_a)$, qui est asymptotiquement monotone, tous les images asymptotiques de tous les $\mathbf{a} \in e^*$ sont congrus (mod $\equiv$).

La définition précédente peut s'étendre aux fonctions $f : E_1 x E_2 x \ldots x E_s \rightarrow E'$ de plusieurs variables en posant, si $\mathfrak{E}_i = (E_i, <_i)$ $\mathfrak{E}_1 x \mathfrak{E}_2 x \ldots x \mathfrak{E}_s = (E_1 x E_2 x \ldots x E_s, <)$, où l'ordre $<$ est tel que
$(e_1, e_2, \ldots, e_s) < (e'_1 e'_2, \ldots, e'_s) \Longleftrightarrow e_1 < e'_1$ & $e_2 < e'_2$ & ... & $e_s < e'_s$.
En particulier si $E_1 = E_2 = \ldots = E_s = E' = E$, f est une loi de composition (S-aire) définie sur E, et le lemme précédent donne la condition nécessaire et suffisante pour que cette loi puisse être étendue à un $e^* \in E_{kr}$ pour le précédé décrit.

§ 2. APPLICATIONS ALGÉBRIQUES DU COMPLÉTÉ DE KRASNER

1. Nombres de Prüfer.

Appliquons ce qui précède à quelques cas particuliers.

Soit d'abord, E l'ensemble N des entiers rationnels non-négatif ordonné par l'ordre $m < n \Longleftrightarrow m$ divise n ; cette notation sera notée m / n. Montrons que cet ensemble partiellement ordonné ne comporte aucune lacune $e = (E_1, E_2)$ étant une coupure de E ; il resulte de la définition des coupures que si $m_1, m_2, \ldots m_i$ sont $\in E_1$ leur p.p.c.m. $m = (m_1, m_2, \ldots, m_i)$ divise tout $n \in E_2$ et que si $n_1, n_2, \ldots n_i$ sont $\in E_2$, tout $m \in E_1$ divise leur p.g.c.d $n = \{n_1, n_2, \ldots, n_i\}$. Trois cas sont possibles :

1) $E_2 = \varnothing$, alors $E_1 = E = N$, donc E_1 possède le plus grand élément 0.

2) $E_2 = \{0\}$. Alors, tout $m \neq 0$ divise l'unique élément 0 de E_2, donc est $\in E_1$ dans ce cas E_2 possède le plus petit élément 0.

3) Il existe un $n \in E_2$ $n \neq 0$. Mais alors, tout $m \in E_1$ divise n. E_1 n'a qu'un nombre fini d'éléments, soit $E_1 = \{m_1, \ldots, m_i\}$. Si $m = \{m_1, \ldots, m_i\}$ est le p.p.c.m. de $m_1, \ldots, m_i$, visiblement tout diviseur propre de m est $\in E_1$ et tout multiple propre m est $\in E_2$. Quant à m lui-même, il est $\in E_1$, auquel cas il en est le plus grand élément, ou il est $\in E_2$, auquel cas il en est le plus petit élément. D'ailleurs, on vérifie aisément que (E_1, E_2) ainsi définis constituent dans chacun de ces deux cas, une coupure, sauf si m est une puissance $p^e \neq 1$ d'un nombre premier p, qui est le plus petit élément de E_2 (En effet, dans ce cas exceptionnel, E_1 est l'ensemble de diviseurs propres de p^e, donc de diviseurs quelconques de p^{e-1} par suite, $n \in E_2$ a lieu dès que n est un multiple propre de p^{e-1}, ce qui n'exige pas sa divisibilité par p^e).

Finalement, nous voyons que le complété de Dédékind de $(N, <)$ coïncide avec cet ensemble ordonné et que son complété de Kurepa est l'ensemble des c^{ξ} ($\xi = -, 0, +, c \in N$) où, toutefois, sont absent 0^+, 1^- et les $(p^e)^-$ (où p est un nombre premier). On voit donc que ces sont des structures à peine plus riches que $(N, I) = (N, <)$.

Il en est tout autrement du complété de Kranser qui n'est autre chose que l'ensemble bien connu des nombres de Prüfer.

En effet, soit e^* un élément de $(N, <)_{kr}$ et soit $\mathbf{a} = (A, \prec)$ un représentant de e^*. On peut supposer (en remplaçant, au besoin ce représentant par un de ces bouts finaux) que **a** est monotone. Si **a** est contragrédient ou bien $A = \{0\}$, auquel cas $a^* = 0$ est son dernier élément, ou bien $A \neq \{0\}$ auquel cas il existe un $a \neq 0$ tel que $a \prec \beta$ implique β / a. Comme a n'a qu'un nombre fini de diviseurs propres, il en resulte que A possède le dernier élément a^* et, par suite, $e^* = a^*$.

Si **a** est congrédient et a un dernier élément a^*, on a encore la même égalité.

Supposons maintenant que **a** est congrédient et ne possède pas de dernier élément, si a et a′ sont deux éléments (forcement non nuls) du support A d'un tel a et si $a \prec x \prec a'$, x divise a′. Donc le nombre de tels x est fini. Par suite A est une suite dénombrable par rapport à son ordre $\prec$, qui, par hypothèse de monotonie et de cogrédience, coïncide avec $<$. On peut donc écrire $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_i \ldots,\}$ où pour tout $i = \{1, 2, \ldots\} \ldots a_i / a_{i+1}$ et inversement toute suite de cette forme ordonnée par la relation $a_i \prec a_j \Longleftrightarrow i < j$, et le représentant de quelque élément de $(N, <)_{kr}$ n'appartenant pas à N. Si p est un nombre premier, soit $Wp(a_i)$ l'ordre de a_i par rapport à p. Puisque a_i / a_{i+1} on a $wp(a_{i+1}) \geq Wp(a_i)$, donc $Wp(a_i)$ est une fonction croissante (en sens large) de i. Ou bien elle est bornée, auquel cas, elle devient constante à partir d'un certain rang, ou bien elle croit indéfiniment. On va définir $Wp(A)$ comme la valeur constante limite de $Wp(a_i)$ dans le premier cas et comme $+\infty$ dans le second cas. (en posant $n < +\infty$ pour tout entier fini n). Si $\mathbf{b} = (B, \prec)$ est monotone et si $\mathbf{a} \equiv \mathbf{b}$, **b** est cogrédient sans derniers élément, donc $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_i, \ldots\}$ où $b_1/b_2/b_3/\ldots/b_i/b_{i+1}\ldots$ et quelque soient $a_i \in A$, et j_0 on peut trouver $bj \in B$, où $j > j_0$, et $a_k \in A$ tel que $a_i \leq bj \leq a_k$ autrement dit $a_i \mid bj \mid a_k$. Ceci montre que $Wp(a_i) \leq Wp(b_j) \leq Wp(a_k)$, d'où resulte $Wp(A) \leq Wp(B) \leq Wp(A)$ et $Wp(B) = Wp(A)$. Vice versa, si pour tout p, $Wp(B) = Wp(A)$, on a $\mathbf{a} \equiv \mathbf{b}$, en effet, sont $a_i \in A$ et soit $a_i = p_1^{w_1} p_2^{w_2} \ldots p_s^{w_s}$ la décomposition de a_i en facteurs premiers. On a par définition $w_q \leq W_{p_q}(A) = W_{p_q}(B)$ $[q = 1, 2, \ldots, s]$.

Ils existent donc des indices $j_1, j_2, \ldots, j_s$ tels que $W_{p_q}(b_{j_q}) \geq w_q$ $(q = 1, 2, \ldots, s)$.

Mais alors, si j_0 est un indice donné d'avance, et $j = \max\limits_{o \leqslant q \leqslant s} j_q$, on a $j \geq j_0$ et pour tous $q = 1, 2, \ldots, s$ $W_{p_q}(b_j) \geq W_{p_q}(b_{j_q}) \geq w_q$ d'où resulte a_i / b_j.

En échangeant les rôles de **a** et de **b**, on voit qn'il existe aussi un indice k tel que b_j/a_k, ce qui finir de prouver que $\mathbf{a} \equiv \mathbf{b}$.

Il en resulte que la classe d'équivalence e^* de $\mathbf{a} = (A, \prec)$ monotone et sans dernier élément (la valeur kurepiènne d'un tel e^* est forcement 0^-.) est parfaitement définie par la fonction $p \to W_p(A)$ $(p = 2, 3, 5 \ldots)$ où p parcourt l'ensemble P des nombres premiers. Or, on peut écrire cette fonction sous la forme de nombre de Prüfer $\prod_{p \in P} p^{w_p(A)}$ (notation).

On va identifier e^* avec ce nombre de Prüfer. Quand e^* parcourt les éléments de $(N, <)\,kr$ de valeur kurepiènne 0^-, le nombre de Prüfer correspondant parcourt tous les nombres de Prüfer, qui sont $\notin N$. En effet, soit $\prod_{p \in P} p^{w_p}$ $[w_p \in N \cup \{+\infty\}]$ un tel nombre de Prüfer et soient $p_1, p_2, \ldots, p_i \ldots i < L \leq +\infty$ tous les nombres premiers, rangés dans l'ordre croissant, tel que $w_p > 0$ [en particulier, si $L < +\infty$ un au moins de w_{p_i} doit être $= +\infty$]. Alors si l'on pose $a_i = \prod_{q < \min[i+1, L]} p_q^{\min[i, w_{p_q}]}$ on a $W_p(a_i) = 0 = w_p$, si p n'est pas de la forme $p_q (q < L)$, tandis que $W_{p_q}(a_i) = 0$ ou $\operatorname{Min}[i, w_{p_q}]$ selon que $L < q$ ou $i \geq q$.

Si l'on pose $A = \{a_1, a_2, \ldots,\}$ on a donc pour tout p $W_p(A) = w_p$.

Quant aux nombres de Prüfer $\in N$, ils coïncident visiblement avec les éléments de $(N, I)\,kr$ d'espèce 0.

Il est visible que la divisibilité habituelle des nombres de Prüfer coïncide avec leur ordre en tout qu'éléments de $(N, I)\,kr$ et que les opérations habituelles de leur produit, p.g.c.d et p.p.c.m. sont des extensions des mêmes opérations dans N par la méthode indiquée plus haut.

D'ailleurs ces opérations sont définis pour des ensembles quelconques de nombres de Prüfer et non seulement pour les ensembles finis.

En particulier, tout nombre de Prüfer $q = \prod_p p^{w_p}$ est produit de ces composantes premier p^{w_p}.

Notons Pr (N) l'ensemble des nombres de Prüfer ordonnés par leur divisibilité.

On constate sans difficulté, que cette structure ordonnée n'a, non plus, aucune lacune et que, par conséquent, les completions de Dédékind et de Kurepa l'enrichissant très peu. Par contre il utile de considérer, en vue des certaines applications, son completé de Krasner dont les éléments seront dits les nombres semi-prüferien. Cela sera fait dans un autre travail.

2. Les Prüferiens des anneaux

A etant un anneau quelconque, soit $(J(A), <)$ l'ensemble des ideaux à gauche de A ordonnés par anti-inclusion $(\mathbf{a} < \mathbf{b} \Longleftrightarrow \mathbf{a} \supset \mathbf{b})$, si l'on applique le même procédé de construction, on obtient un ensemble qu'on peut appeler Prüferien à gauche de A et noter $Pr_g(A)$. Bien entendu, sa structure dépend grandement de celle de l'anneau, même dans le cas commutatif.

En particulier, $Pr_g(A)$ peut comporter, en général, non seulement les éléments des espèces 0 et —, mais aussi ceux d'espèce $+$, et les ensembles d'ideaux à gauche de A, qui définissent, ces éléments, ne sons pas, en général, des suites dénombrables mais des ensembles de cardinalité quelconque totalement ordonnés par rapport à l'inclusion $\subset$.

Les regularités dans la structure de A se traduisent, d'une manière plus ou moins explicite, dans la structure de son Prüferien. Ainsi, si A est noetherien, les éléments de son Prüferien admettent, dans une certaine mesure, la décomposition composantes primaires, et la condition maximale équivaut (même dans le cas non-commutatif), à la non-existence des éléments $\in Pr_g(A)$ d'espèce Kurepiènne $+$.

Si A est non commutatif, on peut définir d'une manière analogue le Prüferien droit $Pr_d(A)$ et à partir de ses ideaux bilaters le Prüferien central $Pr_c(A)$ de A. En construisant les complétés de Krasner de ces Prüferiens, organisés par l'ordre de divisibilité par celui $<$ de $J(A)$ on obtient des ensembles plus larges qu'on peut appeler les semi-Prüferiens gauche, droit et central de A. L'étude de structure de ces ensebles ne fait pas objet du présent travail.

Si A est un anneau commutatif dédékindien les éléments de $Pr(A)$ peuvent être identifiés comme dans le cas $A = Z$, avec les ideaux Prüferiens $\prod\limits_{p \in J(A)} p^{w_p}$ où $w : p \rightarrow w_p$ est une application quelconque de $J(A)$ dans $N \cup \{+\infty\}$.

D'autre part, on peut faire une construction analogue en partant des ideaux principaux de A, ce qui donne $Pr_g^{(h)}(A)$, $Pr_d^{(h)}(A)$, $Pr_c^{(h)}(A)$

qu'on appellera prüferiens principaux gauche, droit et central de A ; il s'agit dans ces cas respectifs, des complétés de Krasner $(A/\varepsilon_g;\ J_g)$, $(A/\varepsilon_d;\ J_d)$, $(A/\varepsilon,\ J)$ où ε_g, ε_d, ε sont les demi-groupes des unités à gauche, droite, et bilatères de A et J_g, J_d, J sont des relations $aJ_g b \Longleftrightarrow (\exists c\in A)\,[a.c=b]$ $\quad aJ_d b \Longleftrightarrow (\exists c\in A)\,[ca=b]$ $a|b \Longleftrightarrow (aJ_g b) \wedge (aJ_d b)$. Si A est un anneau factoriel, dont P est l'ensemble des éléments indecomposables $Pr_g^{(h)}(A) = Pr_d^{(h)}(A) = Pr_c^{(h)}(A)$ s'identifie avec l'ensemble des éléments de Prüfer $\prod\limits_{p\in P} p^{w_p}$ de A.

Il sera montré ailleurs que differents Prüferiens des anneaux peuvent êtres utiles en theorie de modules.

3. Éléments limites d'un groupe sans torsion ou d'un p-groupe.

Donons encore un exemple de complété de Krasner. Soit g un groupe sans torsion, e son unité et soient a, $b\in g$. Posons $a<b$ s'il existe un entier naturel tel que $a^n = b \neq a$; cette relation est manifestement transitive et antiréflexive. Elle est aussi antisymétrique, car $a<b$ et $b<a$ impliquent l'inégalité $a \neq b$ et l'existence des entiers n m qui sont >1 est tels que $a^n = b$, $b^m = a$; mais alors, on a $a = b^m = (a^n)^m = a^{n.m}$ $n.m \neq 1$ donc $a = e$ et $b = e^n = e = a$.

Les éléments de $(g, <)kr$ qui sont $\notin g$ seront dits les éléments limites de g. En particulier, ceux d'espèce — seront dits les diviseurs limites de g et ceux d'espèce + les multiples limites de g.

La construction analogue peut se faire dans un p-groupe infini g (c'est-à-dire un groupe infini tel que les ordres de tous ses éléments soient puissance de p), en posant $a<b \Longleftrightarrow a^n = b \neq a$ où n est une puissance de p, seuls les diviseurs limites existent dans ce cas, et il semble que dans le cas abélien leur introduction puisse être utile pour l'étude de groupes periodiques p-primaires. La même construction, quand n est quelconque, peut être faite dans un demi-groupe D, qui sont sans torsions. C'est-à-dire telles qu'un $a\in D$ non idempotent $(a^2 \neq a)$ ont toutes ces puissances $a^1, a^2, \ldots, a^i, \ldots$ différentes.

Si l'on se limite aux n puissances d'un nombre premier p la même construction s'applique aux p-demi-groupes.

RÉFÉRENCES

1) D. Kurepa, Thèse de Doctora, Paris.
2) L. Dokas, Complétés de Dédékind et de Kurepa, C. R. Ac. Sc. Paris 256/1963.
3) L. Dokas, Certain complétés des ensembles ordonnés muni d'opérations : complété de Krasner, C. R. Ac. Paris, t. 256 p. 3937 - 39/1963.
4) L. Dokas, Sur certains complétés des ensembles ordonnés munis d'opérations, C. R. Ac. Sc. Paris t. 261 p. 9 - 12/1965.
5) L. Dokas, Sur certains complétés . . . C. R. Ac. Sc. Paris t. 248 p. 30 - 33/1964.
6) L. Dokas, Quelques applications du complété de Krasner, C. R. Ac. Sc. Paris t. 264 p. 917 - 919/1967.
7) M. Krasner - L. Dokas, Expression de certaines notions classiques en termes d'un complété des ensembles partiellement ordonné introduit par L. Dokas, C. R. Ac. Paris 7 aut/1967.

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Εἰς τὴν παροῦσαν ἐργασίαν ἀσχολούμεθα μὲ μίαν ἐφαρμογὴν τοῦ συμπληρώματος (complété) KRASNER. Ἡ ἐφαρμογὴ αὐτὴ ἀφορᾷ εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν PRÜFER. Ἀποδεικνύομεν δηλ. ὅτι τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν PRÜFER εἶναι τὸ συμπλήρωμα KRASNER τῶν μὴ ἀρνητικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν διατεταγμένων μερικῶς μὲ σχέσιν διατάξεως ἐκείνην τῆς διαιρετότητος.

Διὰ τοῦ τρόπου αὐτοῦ καθίσταται φανερὰ ἡ σημασία τῆς ἐννοίας τοῦ ὡς ἄνω συμπληρώματος, τὴν εἰσαγωγὴν τοῦ ὁποίου ἐπετύχομεν εἰς προηγουμένας ἐργασίας ἡμῶν. Εἰς κοινὴν ἐργασίαν μετὰ τοῦ Καθηγητοῦ M. KRASNER προτιθέμεθα ὅπως δώσωμεν περαιτέρω ἐφαρμογὴν τοῦ συμπληρώματος τούτου.

Ἡ ἐν λόγῳ κοινὴ ἐργασία ἡμῶν μετὰ τῆς παρούσης ἀποτελοῦν οὕτω συμβολὴν εἰς τὴν καλουμένην θεωρίαν τῶν δομῶν τάξεως (structures d'ordre). Διὰ τὴν εὐκολωτέραν κατανόησιν ἐκ μέρους τοῦ ἀναγνώστου, ἐθεωρήσαμεν σκόπιμον ὅπως προτάξωμεν συντόμως τὰς ἐννοίας συμπληρωμάτων τῶν DÉDÉKIND, KUREPA ὡς καὶ τῶν ἡμιπραγματικῶν ἀριθμῶν, γενίκευσιν τῶν ὁποίων διὰ μερικῶς διατεταγμένα σύνολα ἀπετέλεσε τὸ συμπλήρωμα KRASNER.
