Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἐπιτυγχάνει γενίκευσιν ἀποτελεσμάτων γνωστῶν εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ φάσματος ἑνὸς ταννυστικοῦ γινομένου δύο τοπολογικῶν ἀλγεβρῶν τοπικῶς κυρτῶν. Τὸ ἐνδιαφέρον τῆς γενικεύσεως αὐτῆς εἶναι σημαντικόν.

Ἀπὸ ἀπόψεως διατυπώσεως ἡ παροῦσα ἐργασία τοποθετεῖται εἰς τὰ πλαίσια τῆς Γαλλικῆς Σχολῆς τῶν Bourbaki καὶ εἶναι ἀξιοσημείωτος ἡ ἄνεσις καὶ ἡ οἰκειότης, μὲ τὴν ὁποίαν ὁ κ. Μάλλιος χειρίζεται τὰς μεθόδους τῶν Bourbaki καὶ γενικώτερον τῶν νεωτέρων Μαθηματικῶν.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ.— **Sur la localisation des zéros des polynômes,** *par* ***Jeanne Ferentinou - Nicolacopoulou****. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ Ἀκαδημαϊκοῦ κ. Κ. Παπαϊωάννου.

§ 1. **Introduction.** Nous considérons un polynôme entier f de la variable complexe z et nous cherchons des domaines du plan complexe, contenant tous les zéros de la dérivée de f qui ne coïncident pas avec un zéro de f. L'ensemble des domaines que nous trouvons est différent du domaine connu par le théorème des Gauss - Lucas [3], [5] pour ces zéros. Si nous appelons U l'ensemble des points qui appartiennent dans ces domaines et L l'ensemble déterminé par Gauss - Lucas, pour les zéros du polynôme f′ les différents des zéros du f, nous aboutissons à la conclusion : *Tous les points critiques*** *du polynôme f les différents de ses zéros, appartiennent à l' intersection* $U \cap L$, *sous - ensemble stricte de* L.

§ 2. **Positions des points critiques d'un polynôme entier quant à l'ensemble p - 1 de cercles.** Soit

$$f(z) = (z - z_1)^{m_1} \ldots (z - z_p)^{m_p}, \qquad (1)$$

où z est une variable complexe, $p \geqslant 2$ et $m_1, \ldots, m_p$ les degrés de multiplicité des zéros $z_1, \ldots, z_p$ de f respectivement.

Nous appelons n le degré de ce polynôme. Il est par conséquent

$$n = m_1 + \ldots + m_p. \qquad (2)$$

---

* ΙΩΑΝΝΑΣ ΦΕΡΕΝΤΙΝΟΥ - ΝΙΚΟΛΑΚΟΠΟΥΛΟΥ, Περὶ τοῦ ἐντοπισμοῦ τῶν ριζῶν τῶν πολυωνύμων.

** Points critiques du polynôme f, s'appellent les zéros de sa dérivée. [Voir Marden [6], pag. 11].

Différentiant logarithmiquement les deux membres de (1) nous trouvons

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_1}{z-z_1} + \ldots + \frac{m_p}{z-z_p}.$$

Par conséquent l'équation

$$\frac{m_1}{z-z_1} + \ldots + \frac{m_p}{z-z_p} = 0 \tag{3}$$

a comme racines les zéros du polynôme f′ les différents des zéros de f.

A cause de (2) l'équation (3) s'écrit

$$\frac{m_1}{z-z_1} + \ldots + \frac{m_{p-1}}{z-z_{p-1}} + \frac{n-(m_1+\ldots+m_{p-1})}{z-z_p} = 0. \tag{4}$$

Ou

$$\frac{m_1(z_1-z_p)}{z-z_1} + \ldots + \frac{m_{p-1}(z_{p-1}-z_p)}{z-z_{p-1}} + n = 0.$$

Il est par conséquent

$$n = \sum_{j=1}^{p-1} m_j \frac{z_p-z_j}{z-z_j}. \tag{5}$$

Si nous mettons $I=\{1,\ldots,p\}$ et pour chaque $q \in I : I_q = I - \{q\}$, au lieu des relations (4) et (5) nous aurons les relations plus générales:

$$\left(\sum_{q_i \in I_q} \frac{m_{q_i}}{z-z_{q_i}}\right) + \frac{n - \sum\limits_{q_i \in I_q} m_{q_i}}{z-z_q} = 0 \tag{6}$$

et

$$n = \sum_{q_i \in I_q} m_{q_i} \frac{z_q - z_{q_i}}{z - z_{q_i}}. \tag{7}$$

De l'équation (7) il résulte que chaque racine ξ de cette dernière, remplit la relation

$$n \leqq \sum_{q_i \in I_q} m_{q_i} \left| \frac{z_q - z_{q_i}}{\xi - z_{q_i}} \right|.$$

Il est ainsi

$$n \leqq \left(\sum_{q_i \in I_q} m_{q_i}\right) \underset{(q_i \in I_q)}{\mathrm{Max}} \left\{ \left| \frac{z_q - z_{q_i}}{\xi - z_{q_i}} \right| \right\} = (n - m_q) \underset{(q_i \in I_q)}{\mathrm{Max}} \left\{ \left| \frac{z_q - z_{q_i}}{\xi - z_{q_i}} \right| \right\}.$$

Par conséquent à chaque racine ξ de l'équation (3) correspond pour chaque $q \in I$, un $q_i \in I_q$ au moins, de façon qu'il soit

$$\left| \xi - z_{q_i} \right| \leq \frac{n - m_q}{n} \left| z_q - z_{q_i} \right| . \tag{8}$$

Du résultat ainsi trouvé (8) il s'est démontré le théorème suivant:

Théorème I. *Si les zéros* $z_1, \ldots, z_p$, $(p \geqslant 2)$, *du polynôme* f, *de degré* n, *de la variable complexe* $z : f(z) = (z - z_1)^{m_1} \ldots (z - z_p)^{m_p}$, *ont des degrés de multiplicité* $m_1, \ldots, m_p$ *respectivement et si nous posons* $I = \{1, \ldots, p\}$ *et* $I_q = I - \{q\}$, *où* $q \in I$, *dans ce cas, les points critiques de ce polynôme les différents du* z_q, *appartiennent tous à l'ensemble* $\bigcup\limits_{q_i \in I_q} O_{q_i}$, *où* O_{q_i} *représente, pour chaque* $q_i \in I_q$, *l'ensemble des points intérieurs et de la frontière du cercle qui a comme centre le* z_{q_i} *et comme rayon égal à*

$$\frac{n - m_q}{n} \left| z_q - z_{q_i} \right| .$$

Vu que $\frac{n - m_q}{n} < 1$, est déterminé par ce théorème, pour chaque $q = 1, \ldots, p$, domaine ouvert du plan complexe, contenant le point z_q, dans lequel ne se trouve aucun point critique du polynôme f, différent de z_q.

Du théorème I nous pouvons conclure facilement le suivant:

Théorème II. *Si chaque zéro* z_q, *où* $q \in I = \{1, \ldots, p\}$, $(p \geqslant 2)$, *du polynôme* f, *de degré* n, *de la variable complexe* $z : f(z) = (z - z_1)^{m_1} \ldots (z - z_p)^{m_p}$, *a comme degré de multiplicité* m_q *et nous appelons* O_{q_i}, *où* $q_i \in I_q = I - \{q\}$, *l'ensemble des points intérieurs et de la frontière du cercle qui a comme centre le* z_{q_i} *et comme rayon égal à* $\frac{n - m_q}{n} \left| z_q - z_{q_i} \right|$, *alors les points critiques du polynôme* f *les différents de ses zéros, appartiennent tous à l'ensemble* $\bigcap\limits_{q=1}^{p} \bigcup\limits_{q_i \in I_q} O_{q_i}$.

§ 3. Positions des points critiques d'un polynôme entier quant à un cercle spécial. Nous considérons de nouveau le polynôme f déterminé par la relation (1). Dans le paragraphe précédent nous avons trouvé qu'à chaque zéro ξ du polynôme f', différent des zéros du f, correspond pour chaque $q \in I = \{1, \ldots, p\}$, au moins un élément q_i de l'ensemble $I_q = I - \{q\}$ tel, qu'il soit

$$\left| \xi - z_{q_i} \right| \leqslant \frac{n - m_q}{n} \left| z_q - z_{q_i} \right| .$$

Mais

$$\left| \xi - z_{q_i} \right| \geqslant \left| z_q - z_{q_i} \right| - \left| \xi - z_q \right| .$$

Par conséquent pour le susdit zéro ξ du polynôme f et les nombres mentionnés plus haut q et q_i, on a:

$$\left| z_q - z_{q_i} \right| - \left| \xi - z_q \right| \leqslant \frac{n - m_q}{n} \left| z_q - z_{q_i} \right| .$$

Soit

$$\left| \xi - z_q \right| \geqslant \frac{m_q}{n} \left| z_q - z_{q_i} \right| . \tag{9}$$

La relation (9) exprime que les points critiques du polynôme f, les différents de z_q, se trouvent tous en dehors ou sur la circonférence au moins d'un des $p - 1$ cercles ayant comme centre commun le point z_q et rayons égaux respectivement à $\frac{m_q}{n} \left| z_q - z_{q_i} \right|$, où l'élément q_i de l'ensemble I_q décrit cet ensemble. Par conséquent, tous se trouvent en dehors ou sur la circonférence du cercle qui a comme centre le point z_q et comme rayon égal à

$$\frac{m_q}{n} \underset{(q_i \in I_q)}{\mathrm{Min}} \left\{ \left| z_q - z_{q_i} \right| \right\} .$$

Ce résultat constitue *un corollaire* du Théorème I du paragraphe précédent. Un corollaire analogue résulte aussi d'une manière évidente du théorème II du même paragraphe. Nous l'exprimons ainsi:

Corollaire. *Si chaque zéro* z_q, *où* $q \in I = \{1, \ldots, p\}$, $(p \geqslant 2)$, *du polynôme* f *de la variable complexe* z, *de degré* n: $f(z) = (z - z_1)^{m_1} \ldots (z - z_p)^{m_p}$, *a comme degré de multiplicité* m_q *et s'appelle* A_q *l'ensemble des points intérieurs du cercle qui a comme centre le* z_q *et comme rayon égal à*

$$\frac{m_q}{n} \underset{(q_i \in I_q)}{\mathrm{Min}} \{ |z_q - z_{q_i}| \}, \quad \text{où } I_q = I - \{q\},$$

dans ce cas, aucun point critique du polynôme f, *différent de ses zéros, n'appartient à l'ensemble* $\bigcup\limits_{q=1}^{p} A_q$.

Remarque. Vu que selon le corollaire, dans l'intérieur du cercle $|z - z_q| \leqslant \frac{m_q}{n} \underset{(q_i \in I_q)}{\mathrm{Min}} \{ |z_q - z_{q_i}| \}$ il n'existe aucun point critique du polynôme f, différent de z_q, la fonction f est dans le domaine

$$0 < |z - z_q| < \frac{m_q}{n} \underset{(q_i \in I_q)}{\mathrm{Min}} \{ |z_q - z_{q_i}| \}$$

localement univalente [8].

Supposons maintenant que le polynôme f est selon ce qui précède localement univalent dans le domaine $0 < |z| < \frac{r}{n} |z'|$, où il a été posé $z_q = 0$, $r = m_q$ et $|z'| = \underset{(q_i \in I_q)}{\mathrm{Min}} \{ |z_{q_i}| \}$. Biernacki a trouvé [2], comme il est mentionné par Montel [7], que si le polynôme f de degré n admet l'origine comme zéro d'ordre r, alors il est r - valent dans le cercle $|z| \leqslant \frac{r}{n} |z'|$, z' étant un zéro de plus petit module du polynôme $\frac{f(z)}{z^r}$. Cette proposition de Biernacki constitue une généralisation d'une proposition plus ancienne d'Alexander [1], selon laquelle, si $r = 1$, alors le polynôme est univalent dans le cercle $|z| \leqslant \frac{|z'|}{n}$, z' étant un zéro de plus petit module du polynôme $\frac{f(z)}{z}$.

En combinant cette proposition de Biernacki avec le corollaire, nous aboutissons à la conclusion suivante:

Un polynôme entier f *de la variable complexe* z, *de degré* n, *qui a le* 0 *comme zéro de degré de multiplicité* r, *d'une part il est* r - *valent dans le cercle* $|z| \leqslant \frac{r}{n} |z'|$, *z' étant un zéro de plus petit module du polynôme* $\frac{f(z)}{z^r}$, *et d'autre part localement univalent dans le domaine* $0 < |z| < \frac{r}{n} |z'|$.

§ 4. Combinaison des théorèmes et corollaires trouvés, avec le théorème des Gauss-Lucas. Le domaine fixé, par le théorème des Gauss-Lucas, pour les points critiques du polynôme f, les différents de ses zéros, est composé, comme on sait, de l'intérieur d'un polygone convexe et fermé, tel que d'une part aucun zéro de f ne se trouve extérieurement de ce polygone, et d'autre part que tout autre polygone convexe qui remplit cette restriction le renferme. Dans le cas spécial, où tous les zéros de f sont placés sur une et même ligne droite, ce domaine est alors un segment rectiligne ouvert, avec extremités des zéros de f, contenant tous ses autres zéros.

Nous appelons L l'ensemble des points du domaine ci-haut et nous posons, en conservant les symbolismes des paragraphes 2 et 3,

$$C_q = \bigcup_{q_i \in I_q} O_{q_i}\,, \quad C' = \bigcap_{q=1}^{p} C_q\,, \quad A = \bigcup_{q=1}^{p} A_q\,.$$

Le théorème I exprime que chaque point critique de f différent de z_q appartient à l'ensemble C_q. Le corollaire qui résulte de ce théorème, exprime qu'aucun point critique de f différent de z_q n'appartient à l'ensemble A_q.

Le théorème II exprime que chaque point critique de f différent de ses zéros appartient à l'ensemble C', et le corollaire qui résulte de ce dernier exprime qu'aucun point critique de f, qui ne coïncide avec un zéro, appartient à A.

En combinant ces théorèmes et corollaires avec le théorème des Gauss-Lucas, nous concluons:

a) *Chaque point critique du polynôme* f *qui ne coïncide pas avec un de ses zéros* z_q *appartient à l'ensemble* $L \cap C_q$.

b) *Chaque point critique du polynôme* f *qui ne coïncide pas avec un de ses zéros* z_q *appartient à l'ensemble* $L - A_q$.

c) *Chaque point critique du polynôme* f *qui ne coïncide pas avec un de ses zéros appartient à l'ensemble* $L \cap C'$.

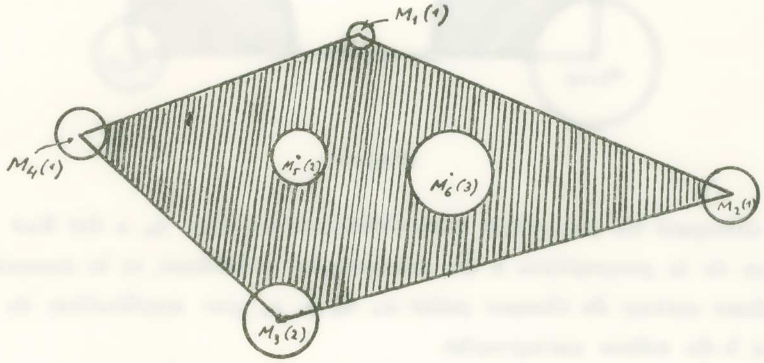
d) *Chaque point critique du polynôme* f *qui ne coïncide pas avec un de ses zéros appartient à l'ensemble* $L - A$.

Comme il est évident ces quatres ensembles sont des sous-ensembles strictes de L.

Le domaine, déterminé par la proposition b (corresp. d), du plan complexe, pour les points critiques du polynôme f les différents du zéro z_q (corresp. aux zéros $z_1, \ldots, z_p$) est évidemment d'une plus grande extension de celui déterminé par la proposition a (corresp. c). Malgré cela les propositions b et d ont à l'égard des a et c respectivement l'avantage qu'elles sont plus applicables et cela parceque par ces propositions est exclue pour les susdits points critiques autour de chaque point z_q un domaine circulaire trouvé par le tracement d'un seul cercle. Par les propositions a et c on obtient une plus grande exactitude, étant exclu d'un domaine plus grand, autour de chaque point z_q, mais il est éxigé pour cela le tracement pour chaque z_q $p-1$ de cercles.

§ 5. Applications des conclusions trouvées.

1ère Application. A la (fig. 1) ont été représentés les zéros z_q de quelque polynôme entier f. Le degré de ce polynôme a été pris égal à 10, et comme degré de multiplicité de chaque zéro il a été considéré le nombre étant écrit à côté entre parenthèse.

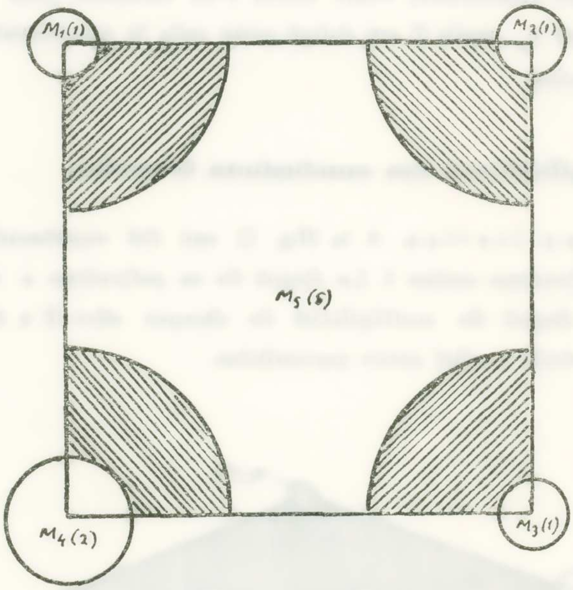


(Fig. 1)

Les cercles étant écrits avec comme centres les points z_q, sont ceux qui sont déterminés par les ensembles A_q du Corollaire du paragraphe 3, et le domaine dans le quadrilatère figuré, est celui qui est désigné par le théorème des Gauss - Lucas.

Le domaine noté dans l'intérieur du quadrilatère par lignes parallèles, avec les arcs circulaires placés dans ce quadrilatère, est le domaine désigné par la proposition d du paragraphe précédent, pour les points critiques du polynôme f qui ne coïncident pas avec un de ses zéros.

2ème Application. A la (fig. 2) ont été représentés d'une façon similaire les zéros du polynôme f et a côté de chaque point a été noté le degré de multiplicité du zéro correspondant. Le domaine exclu pour les

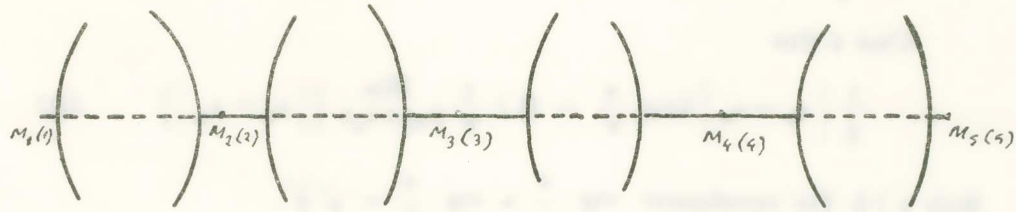


(Fig. 2)

points critiques du polynôme f les différents du zéro z_5, a été fixé par application de la proposition a du paragraphe précédent, et le domaine correspondant autour de chaque point z_1, z_2, z_3, z_4, par application de la proposition b du même paragraphe.

Ainsi le domaine pour les points critiques du polynôme f, différents des zéros de f, est constitué de quatres domaines circulaires, notés par lignes parallèles, intérieures du quadrilatère figuré, avec les arcs circulaires placés dans le quadrilatère.

3ème Application. A la (fig. 3) ont été représentés d'une façon de nouveau similaire, les zéros de polynôme f avec les degrés de leur multiplicité correspondants. Ces zéros se trouvent tous sur la même ligne droite. On a appliqué exclusivement la proposition b du paragraphe précédent. Le domaine ainsi trouvé pour les points critiques du polynôme f,



(Fig. 3)

différents des zéros de f, est constitué de l'ensemble des segments rectilignes fermés, qui sont tracés par lignes interrompues.

§ 6. Combinaison des conclusions trouvées, avec un théorème de Grace, quand le degré n du polynôme f est plus grand que 5. Par la théorie de l'apolarité, Grace a démontré [4] que si z_1, z_2, sont deux zéros différents entre eux, du polynôme f de la variable complexe z, dans ce cas le cercle écrit avec comme centre le milieu du segment rectiligne ayant comme extrémités ces zéros et comme rayon égal au $\frac{1}{2}\left|z_1 - z_2\right| \operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$ contient dans l'intérieur ou sur sa circonférence, au moins un point critique de ce polynôme.

Supposons que $n > 5$. Les zéros z_1 et z_2 sont placés maintenant à l'intérieur du cercle de Grace, correspondant à eux. Par conséquent le théorème de Grace présente un intérêt, si ces zéros ne sont pas des points critiques du polynôme f. Admettons pour cela que les zéros z_1 et z_2 sont simples. Le corollaire du § 3 nous permet de séparer du cercle de Grace correspondant à ces zéros, les points intérieurs des cercles désignés par les ensembles A_1 et A_2. Surtout dans le cas examiné $(n > 5)$, les cercles désignés par ces ensembles sont intérieurs du cercle de Grace.

En effet, les symbolismes du § 3 étant conservés, considérons un simple zéro z_q du polynôme f. Le cercle désigné par l'ensemble A_q a comme centre z_q et comme rayon égal à $\frac{1}{n} \underset{(q_i \in I_q)}{\mathrm{Min}} \left\{ \left| z_q - z_{q_i} \right| \right\}$. Nous démontrerons que, si $q' \in I$ et $q' \neq q$, alors

$$\left| z_q - \frac{z_q + z_{q'}}{2} \right| < \frac{1}{2} \left| z_q - z_{q'} \right| \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} - \frac{1}{n} \underset{(q_i \in I_q)}{\mathrm{Min}} \left\{ \left| z_q - z_{q_i} \right| \right\}. \quad (10)$$

C'est à dire

$$\frac{1}{2} \left| z_q - z_{q'} \right| \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} - 1 \right) > \frac{1}{n} \underset{(q_i \in I_q)}{\mathrm{Min}} \left\{ \left| z_q - z_{q_i} \right| \right\}. \quad (11)$$

Mais $n > 5$. Par conséquent $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} \geq \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$.

Donc

$$\frac{1}{2} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} - 1 \right) \geq \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} - 1 \right) > \frac{1}{6} \geq \frac{1}{n}.$$

Par conséquent

$$\frac{1}{2} \left| z_q - z_{q'} \right| \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} - 1 \right) > \frac{1}{n} \left| z_q - z_{q'} \right| \geq \frac{1}{n} \underset{(q_i \in I_q)}{\mathrm{Min}} \left\{ \left| z_q - z_{q_i} \right| \right\}.$$

Par conséquent la relation (11) est valable. Il en est de même de la relation (10). Mais cette relation exprime que le cercle désigné par l'ensemble A_q est placé à l'intérieur du cercle de Grace correspondant aux zéros z_q et $z_{q'}$. Nous aboutissons ainsi à la conclusion suivante.

Si f *est un polynôme entier de la variable complexe* z *de degré* $n > 5$ *et* z_1, z_2 *sont deux zéros simples de ce polynôme, dans ce cas au moins un point critique de* f *est placé d'une part intérieurement ou sur la circonférence du cercle qui a comme centre le milieu du segment* $z_1 z_2$ *et comme rayon égal à* $\frac{1}{2} \left| z_1 - z_2 \right| \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$, *et d'autre part extérieurement ou sur une des circonférences des cercles — intérieurs du précédent — ayant comme centres les* z_1, z_2 *et comme rayons égaux respectivement aux* $\frac{d_1}{n}$, $\frac{d_2}{n}$, *où* d_1 *(corresp.* d_2*), représente le minimum des distances du zéro* z_1 *(corresp.* z_2*), de tous ses différents zéros du polynôme* f.

§ **7. Généralisation aux fonctions rationnelles.** Les théorèmes du § 2 ainsi que les corollaires qui en résultent du § 3 se transforment facilement, d'une façon qui permet de désigner un domaine, du plan complexe, contenant tous les zéros de la fonction rationnelle F de la variable complexe z:

$$F(z) = \frac{h_1}{z - z_1} + \ldots + \frac{h_p}{z - z_p}.$$

On suppose que $p \geq 2$, les nombres $z_1, \ldots, z_p$ sont différents entre eux, par deux, et les $h_1, \ldots, h_p$ sont des nombres quelconques du corps complexe C, différents de zéro.

La généralisation est obtenue de façon évidente, si on va mettre simplement $m_q = \left| h_q \right|$ et $n = \sum_{q=1}^{p} \left| h_q \right|$.

Les syllogismes faits dans les paragraphes 2 et 3 ne changent point de ce que les nombres m_q ne sont pas nécessairement des nombres naturels.

Nous exprimons ci-dessous un théorème et un corollaire concernant les zéros des fonctions F, en transformant convenablement, l'énoncé du Théorème II du paragraphe 2 et celui du Corollaire du § 3, resultant de ce Théorème.

Théorème. *Soit* $F(z) = \sum_{q=1}^{p} \frac{h_q}{z - z_q}$, *où* z *variable complexe,* $p \geq 2$, $z_1, \ldots, z_p$ *nombres du corps complexe* C *différents par deux et* $h_1, \ldots, h_p$ *nombres du même corps* C *différents de zéro. Nous appelons* O_{q_i}, $q \in I = \{1, \ldots, p\}$ et $q_i \in I_q = I - \{q\}$ *l'ensemble des points intérieurs du cercle, ainsi que de sa circonférence, qui a comme centre le* z_{q_i} *et comme rayon égal à*

$$\frac{\sum_{q_i \in I_q} \left| h_{q_i} \right|}{\sum_{q \in I} \left| h_q \right|} \left| z_q - z_{q_i} \right|,$$

alors tous les zéros de la fonction rationnelle F, *appartiennent à l'ensemble* $\bigcap_{q=1}^{p} \bigcup_{q_i \in I_q} O_{q_i}$.

Corollaire. *Si* $F(z) = \sum_{q=1}^{p} \frac{h_q}{z - z_q}$, *où* z *variable complexe,*

$p \geqslant 2$, $z_1, \ldots, z_p$ *nombres du corps complexe* C, *différents par deux et* $h_1, \ldots, h_p$ *nombres du même corps* C *différents de zéro et si nous appelons* A_q *l'ensemble des points intérieurs du cercle qui a comme centre le* z_q, $q \in I = \{1, \ldots, p\}$ *et comme rayon égal à*

$$\frac{|h_q|}{\sum_{q=1}^{p} |h_q|} \min_{(q_i \in I_q)} \{ | z_q - z_{q_i} | \},$$ *ou* $I_q = I - \{q\}$, *alors aucun zéro de la fonction rationnelle* F, *appartient à l'ensemble* $\bigcup_{q=1}^{p} A_q$.

§ 8. Généralisation abstraite. Les théorèmes et les corollaires des paragraphes 2, 3 et 7, que nous avons énoncés pour des polynômes entiers et fonctions rationnelles, dont les coefficients et les zéros appartiennent au corps complexe, se généralisent automatiquement dans les cadres de la théorie [9] de Mr S.P. Zervos, si au lieu du corps complexe nous considérons quelque corps algébriquement clos de caractéristique zéro. Par conséquent toutes les nouvelles conclusions qui ont été résultées par les théorèmes et corollaires mentionnés plus haut, quant à la localisation des zéros des fonctions dans le corps complexe, conduisent à de nouvelles conclusions pour des fonctions dans les susdits plus généraux corps.

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Θεωρεῖται ἀκέραιον πολυώνυμον f, βαθμοῦ n, τῆς μιγαδικῆς μεταβλητῆς z:

$$f(z) = (z - z_1)^{m_1} \ldots (z - z_p)^{m_p},$$

ὅπου $m_1, \ldots, m_p$ $(p \geq 2)$ εἶναι οἱ βαθμοὶ πολλαπλότητος τῶν ριζῶν $z_1 \ldots z_p$ ἀντιστοίχως.

Τίθεται $I = \{1, \ldots, p\}$ καὶ $I_q = I - \{q\} (q \in I)$ καὶ συμβολίζεται μὲ O_{q_i} $(q_i \in I_q)$ τὸ σύνολον τῶν ἐσωτερικῶν καὶ συνοριακῶν σημείων τοῦ κύκλου, ὅστις ἔχει κέντρον τὸ σημεῖον z_{q_i} καὶ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς $\frac{n - m_q}{n} \left| z_q - z_{q_i} \right|$.

Ἀποδεικνύεται ὅτι: *ὅλα τὰ κριτικὰ σημεῖα τοῦ πολυωνύμου* f *ἀνήκουν εἰς τὸ σύνολον* $\bigcup_{q_i \in I_q} O_{q_i}$, *ὅπου* q *τυχὸν στοιχεῖον τοῦ* I.

Συνεπῶς: *ὅλα τὰ κριτικὰ σημεῖα τοῦ πολυωνύμου* f *ἀνήκουν ἐπίσης εἰς τὸ σύνολον* $\bigcap_{q=1}^{p} \bigcup_{q_i \in I_q} O_{q_i}$.

Περαιτέρω ἀποδεικνύεται ὅτι: *ἐντὸς τοῦ κύκλου, ὅστις ἔχει κέντρον τὸ σημεῖον* z_q $(q \in I)$ *καὶ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς* $\frac{m_q}{n} \underset{(q_i \in I_q)}{\mathrm{Min}} \left\{ \left| z_q - z_{q_i} \right| \right\}$, *οὐδὲν κριτικὸν σημεῖον τοῦ πολυωνύμου* f, *διάφορον τοῦ* z_q, *εὑρίσκεται.*

Διὰ τῶν νέων τούτων ἀποτελεσμάτων μειοῦται ἡ γνωστὴ ὑπὸ τοῦ θεωρήματος τῶν Gauss - Lucas [3], [5], περιοχὴ διὰ τὰ κριτικὰ σημεῖα τοῦ πολυωνύμου f, ἐπίσης δὲ συμπληροῦται γνωστὸν θεώρημα τοῦ Grace [4].

Τὰ προκύψαντα συμπεράσματα ἐπεκτείνονται εἰς ρητὰς συναρτήσεις. Βάσει δὲ τῆς ἀναπτυχθείσης ὑπὸ τοῦ Καθηγητοῦ κ. Σ. Π. Ζερβοῦ θεωρίας [9] γενικεύονται εὐχερῶς εἰς τρόπον, ὥστε νὰ ἀφοροῦν εἰς ρίζας συναρτήσεων ὁριζομένων εἰς σώματα ἀλγεβρικῶς κλειστὰ μὲ χαρακτηριστικὴν μηδέν.

BIBLIOGRAPHIE

1. ALEXANDER, J. W.—Functions which map the Interior of the Unit Circle upon simple Regions, Annales of Math vol. 17, 1915, pag. 12 - 22.
2. BIERNACKI, M.—Sur les équations algébriques contenant des paramètres arbitraires. Bull. Intern. de l'Ac. Polonaise, S.A. 1927, pag. 546 - 685.
3. GAUSS, C. F. - Oeuvres complètes, vol. 3, pag. 112 et 492.
4. GRACE, J. H.—The zeros of a polynomial. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, vol. 11, 1902, pag. 352 - 357.
5. LUCAS, F.—Géométrie des polynômes, Journal de l'Ecole Polytechnique, vol. 46, 1879, pag. 1 - 33.
6. MARDEN, M.—The geometry of the zeros of a polynomial in a complex variable, Math. Surveys III, New York, 1949, pag. 11.
7. MONTEL, P.—Leçons sur les fonctions univalentes et multivalentes, Paris, 1933, pag. 27.
8. —— Selecta, Paris, 1947, pag. 136.
9. ZERVOS, S. P.—Aspects modernes de la localisation des zéros des polynômes d'une variable, Ann. Ec. Norm. Sup. Fasc. 4. 1960.

*

Ὁ Ἀκαδημαϊκὸς κ. **Κ. Παπαϊωάννου,** κατὰ τὴν ἀνακοίνωσιν τῆς ὡς ἄνω ἐργασίας, εἶπε τὰ κάτωθι:

Ἡ Κυρία Νικολακοπούλου εἶναι πτυχιοῦχος τῶν Μαθηματικῶν τοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν, μαθήτρια τοῦ ἀειμνήστου Παναγιώτου Ζερβοῦ, ἀσχοληθεῖσα μὲ *ἐρεύνας ἐπὶ τῆς Θεωρίας τῶν Ἀριθμῶν καὶ τοῦ ἐντοπισμοῦ τῶν ριζῶν τῶν Πολυωνύμων. Ἡ Κυρία Νικολακοπούλου ἔχει ὁρμηθῆ κατὰ τὰ τελευταῖα ἔτη εἰς τὴν ἔρευναν τοῦ τομέως τούτου τῶν Πολυωνύμων ἐκ τοῦ ἔργου τοῦ Καθηγητοῦ τοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν κ. Σπυρίδωνος Ζερβοῦ.*

Τὰ πρῶτα σχετικὰ ἐνδιαφέροντα ἀποτελέσματα τῆς ἐρεύνης της ἀνεκοινώθησαν ὑπ' ἐμοῦ εἰς τὴν Ἀκαδημίαν Ἀθηνῶν κατὰ τὸ ἔτος 1962 καὶ ἀφεώρων εἰς νέους γενικοὺς τύπους ἀνωτέρων φραγμάτων τῶν μέτρων τῶν ριζῶν τῶν πολυωνύμων μιᾶς μιγαδικῆς μεταβλητῆς. Εἰς τὴν αὐτὴν κατεύθυνσιν ἀνήκει καὶ ἡ διατριβὴ ἐπὶ διδακτορίᾳ, τὴν ὁποίαν ὑπέβαλεν ἡ Κυρία Νικολακοπούλου εἰς τὴν Φυσικομαθηματικὴν Σχολὴν τοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν, ἀναγορευθεῖσα διδάκτωρ μὲ τὸν βαθμὸν «Ἄριστα». Τὰ συμπεράσματα τῆς διδακτορικῆς ταύτης ἐργασίας, προστιθέμενα εἰς τὰ κατὰ τὸ ἔτος 1957 ἀνακοινωθέντα ὑπὸ τοῦ κ. Σπυρίδωνος Ζερβοῦ εἰς τὴν Ἀκαδημίαν τῶν Παρισίων, ὡς καὶ τὰ τοῦ Καθηγητοῦ τοῦ Πανεπιστημίου τοῦ Βελιγραδίου κ. Markovitch, τὰ ὁποῖα εἶχον τὴν τιμὴν νὰ ἀνακοινώσω εἰς τὴν Ἀκαδημίαν Ἀθηνῶν, δίδουν εἰς τοὺς Βαλκανίους Μαθηματικοὺς τὴν πρώτην θέσιν εἰς τὸν εἰδικὸν τομέα τῆς εὑρέσεως γενικῶν τύπων ἀνωτέρων φραγμάτων μέτρων ριζῶν πολυωνύμων.

Εἰς τὴν παροῦσαν διεξοδικὴν ἔρευνάν της, ἡ Κυρία Νικολακοπούλου ἐξετάζει διάφορον πρόβλημα ἐντοπισμοῦ ριζῶν πολυωνύμων, σχετικὸν μὲ τὸ προκῦψαν ἀπὸ τὴν ἐργασίαν τοῦ Gauss διὰ τὸν ἐντοπισμὸν τῶν ριζῶν τῆς παραγώγου δοθέντος πολυωνύμου. Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἔχει, ὡς γνωστόν, συγκεντρώσει τὸ ἐνδιαφέρον πολλῶν Μαθηματικῶν, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἐπιτύχει σημαντικὰ ἀποτελέσματα εἰς τὸ μιγαδικὸν σῶμα, ἡ δὲ βαθυτέρα ἑρμηνεία τῶν αἰτίων εἰς τὰ πλαίσια τῶν νεωτέρων Μαθηματικῶν ἐδόθη κατὰ τὸ 1958 ἀπὸ τὸν κ. Σπυρίδωνα Ζερβόν, ὁ ὁποῖος καὶ ἐγενίκευσε πλεῖστα σχετικὰ ἀποτελέσματα εἰς σώματα πολὺ γενικώτερα τοῦ μιγαδικοῦ.

Ἡ Κυρία Νικολακοπούλου, χρησιμοποιοῦσα νέας, ἁπλᾶς κατὰ βάσιν, ἀποδεικτικὰς μεθόδους, ἐπιτυγχάνει νέα ἐνδιαφέροντα ἐξαγόμενα διὰ τὸ σημαντικὸν τοῦτο πρόβλημα.