ΠΕΡΙ ΜΙΑΣ ΙΔΙΟΤΗΤΟΣ ΤΩΝ ΠΛΕΙΟΝΟΤΙΜΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΥΠΟ Θ. ΒΑΡΟΠΟΥΛΟΥ

(ὑποβληθεῖσα ὑπὸ τοῦ κ. Κωνστ. Μαλτέζου)

Θεωρήσωμεν μίαν πλειονότιμον συνάρτησιν $f(x)$ ἔχουσαν ν κλάδους $f_1, f_2, \dots, f_\nu$. θὰ λέγωμεν ὅτι αὕτη εἶναι ἀλγεβροϊδής, ἂν αἱ εἰς τυχοῦσαν τιμὴν τοῦ x ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ τῶν $f_1(x), f_2(x), \dots, f_\nu(x)$ ἐπαληθεύουσιν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς

$$G(x,u) \equiv u^\nu + g_1(x)\,u^{\nu-1} + g_2(x)\,u^{\nu-2} + \dots + g_\nu(x) = 0$$

ὅπου οἱ συντελεσταὶ $g_1(x), g_2(x), \dots, g_\nu(x)$ εἶναι ἀκέραιαι συναρτήσεις οὐχὶ πᾶσαι πωλυώνυμα.

Διὰ τὰς συναρτήσεις ταύτας ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ θεωρήματος τῶν PAINLEVÉ-ΡΕΜΟΥΝΔΟΥ[1] εἶναι γνωστὸν ὅτι ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ ἀπείρου λαμβάνουν πᾶσαν τιμὴν πεπερασμένην ἐκτὸς τὸ πολὺ $2\nu-1$.

Ἐὰν δὲ λ ($\lambda \leq \nu-1$) εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν γραμμικῶν σχέσεων, ἀνεξαρτήτων ἀλλήλων, μεταξὺ τῶν συντελεστῶν $g_i(x)$ τῆς μορφῆς

$$C_1 G_1(x) + C_2 G_2(x) + \dots + C_\nu G_\nu(x) + C = 0$$

ὅπου $C_1, C_2, \dots, C_\nu$, C εἶναι σταθεροί, τότε δυνάμεθα[2] ν' ἀντικαταστήσωμεν τὸ $2\nu-1$ ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ $\nu+\lambda$.

Οὐδεμίαν ὑπόθεσιν κάμνομεν ἐπὶ τοῦ πολυωνύμου $G(x,u)$ ὡς πρὸς u ὅπερ δύναται νὰ εἶναι ἀνάγωγον ἢ μή.

Καθ' ἣν περίπτωσιν τὸ πολυώνυμον $G(x,u)$ τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν γινομένου $m \geq 1$ ἄλλων πολυωνύμων ἀναγώγων ὡς πρὸς u ὁ P. MONTEL ἔθεσε τὸ ζήτημα νὰ μάθωμεν ποῖον εἶναι τὸ ἀνώτερον ὅριον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐξαιρετικῶν τιμῶν τῆς ἀλγεβροϊδοῦς καὶ ποία εἶναι ἑπομένως ἡ τελειοποίησις ἣν δυνάμεθα νὰ ἐπιφέρωμεν εἰς τὸ θεώρημα τῶν PAINLEVÉ-ΡΕΜΟΥΝΔΟΥ.

Ἐὰν θέσωμεν

$$G(x,u) \equiv \varphi_1(x,u)\,\varphi_2(x,u)\dots\varphi_m(x,u)$$

εἶναι φανερὸν ὅτι μιὰ τιμὴ $u=\bar{u}$ δὲν δύναται νὰ εἶναι ἐξαιρετικὴ διὰ τὴν ἀλγε-

---

[1] G. RÉMOUNDOS: Sur les zéros d'une classe de fonctions transcendantes (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse 2e s. t. VIII, 1903.

[2] TH. VAROPOULOS: Sur le nombre des valeurs exceptionnelles des fonctions multiformes (Gomptes Rendus t. 177, p. 306 1923; Bulletin de la Société Mathematique de France t. LIII, 1925, p. 23-34).

βροϊδῆ $u = f(x)$ χωρὶς νὰ εἶναι τοιαύτη διὰ μίαν τουλάχιστον τῶν ἀλγεβροειδῶν τῶν ὁριζομένων ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων

$$\varphi_1(x,u) = 0, \ \varphi_2(x,u) = 0, \ldots, \varphi_m(x,u) = 0$$

τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν βαθμῶν εἶναι ν καὶ αἵτινες ὑποτίθενται ἀνάγωγοι.

Ἐὰν καλέσωμεν

$$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$$

τὸν βαθμὸν τῶν ἐξισώσεων

$$\varphi_i(x,u) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

αἱ μερικαὶ ἀλγεβροϊδεῖς ἔχουσι τὸ πολὺ ἐξαιρετικὰς τιμὰς πεπερασμένας

$$2\nu_1 - 1, \ 2\nu_2 - 1, \ldots, 2\nu_m - 1$$

Ἔχομεν ἑπομένως τὸ ἑξῆς θεώρημα ὅπερ ἀπαντᾷ πλήρως εἰς τὸ ὑπὸ τοῦ κ. MONTEL τεθὲν ἐρώτημα.

Θεώρημα:

Θεωρήσωμεν μίαν ἀλγεβροϊδῆ συνάρτησιν ὁριζομένην ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$G(x,u) \equiv u^\nu + f_1(x)u^{\nu-1} + f_2(x)u^{\nu-2} + \ldots + f_\nu(x) = 0$$

καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ πολυώνυμον $G(x,u)$ *ἀναλύεται εἰς γινόμενον* m *ἄλλων πολυωνύμων μὲ συντελεστὰς ἀκεραίας συναρτήσεις*

ἡ ἀλγεβροϊδὴς λαμβάνει ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ ἀπείρου πᾶσαν τιμὴν ἐκτὸς τὸ πολὺ

$$2\nu - m + 1$$

τοῦ ἀπείρου συμπεριλαμβανομένου.

Ἄξιον παρατηρήσεως εἶναι ὅτι τὸ ἀνώτερον ὅριον 2ν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐξαιρετικῶν τιμῶν τὸ διδόμενον ὑπὸ τοῦ θεωρήματος τῶν PAINLEVÉ-REMOUNDOU παρουσιάζεται ὡς μερικὴ περίπτωσις τοῦ ἀνωτέρου ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν τιμὴν

$$m = 1$$